

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
b. En remarquant que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x}$.
b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
3. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en son point d'abscisse 0.
4. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
Tracer la droite (T) et la courbe (C_f) sur l'intervalle $[0 ; 8]$ dans le plan (P) .
5. a. Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0 ; 8]$ de l'équation $f(x) = 0,4$.
b. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la plus grande des solutions de l'équation considérée à la question 5. a.