EXERCICE 4 (*6 points*)

On désigne par *f* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{5x - 5}{e^x}$$

On nomme (*C*) sa représentation graphique dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer *f* (0).

2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]0 ; +∞[, $f(x) = \dfrac{5 - \dfrac{5}{x}}{\dfrac{e^x}{x}}$

   b. En déduire la limite de la fonction *f* en +∞. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note *f* ' la fonction dérivée de la fonction *f*.

   a. Démontrer que pour tout nombre réel *x* positif : $f'(x) = \dfrac{-5x + 10}{e^x}$

   b. Étudier le signe de la fonction *f* '.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* .

4. Représenter graphiquement la courbe (*C*) dans le plan (P).

5. On note *F* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $F(x) = -5xe^{-x}$.

   a. Démontrer que la fonction *F* est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; +∞[.

   b. On considère l'aire *A*, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives *x* = 1 et *x* = 4.
   Hachurer ce domaine sur le graphique précédent.

   Calculer la valeur exacte de *A*, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.