EXERCICE 3 *(7 points)*

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=(x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

On note $f\,'$ sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel *x* de [0 ; +∞[, on a :
$f\,'(x)=(-0,5x-3)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[.
2. Démontrer que la fonction *F* définie sur [0 ; +∞[par $F(x)=(-2x-20)\mathrm{e}^{-0,5x}$ est une primitive de *f* sur ce même intervalle.
3. Calculer l'intégrale $I=\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près.

PARTIE B : APPLICATIONS ECONOMIQUES

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction *f* étudiée dans la partie A. Le nombre *f* (*x*) représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à *x* centaines d'euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros.
3. L'élasticité *E*(*x*) de la demande par rapport au prix *x* est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de *x*. On admet qu'une bonne approximation de *E*(*x*) est donnée par :

$$E(x)=\frac{f\,'(x)}{f(x)}\times x\,.$$

   a) Démontrer que $E(x)=\dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8}$.
   b) Déterminer le signe de *E*(*x*) sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat.
   c) Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à − 3,5. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ?