

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis éventuellement au millième.

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles.

Partie A : Étude du processus de mise en bouteille

La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans 2 machines M_1 et M_2 . La machine remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteille de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5 % des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8 % ont un bouchon. D'autre part, 4 % des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchons.

On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

- R l'événement : « la bouteille est correctement remplie » ;
- B l'événement : « la bouteille a un bouchon ».

Rappel des notations :

Si A et B sont deux événements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

$\bar{A}$ désigne l'événement contraire de l'événement A .

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.
3. Montrer que la probabilité que la bouteille ait un bouchon est égale à 0,916.
4. Sachant que la bouteille a un bouchon, déterminer la probabilité qu'elle soit correctement remplie.

Partie B : Production journalière

Une étude sur les dix premières années a montré que la production journalière de bouteilles de lait dans cette entreprise peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 2 000 et d'écart type 200.

1. Calculer la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1 800 et 2 200 bouteilles.
2. Le service maintenance doit intervenir sur les machines si la production journalière devient inférieure à 1 600 bouteilles. Déterminer la probabilité que le service maintenance intervienne sur les machines.

Rappel :

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \approx 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \approx 0,977$