Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

— la fonction f définie sur $[0 ; 14]$ par

$$f(x) = 2000\mathrm{e}^{-0,2x}$$

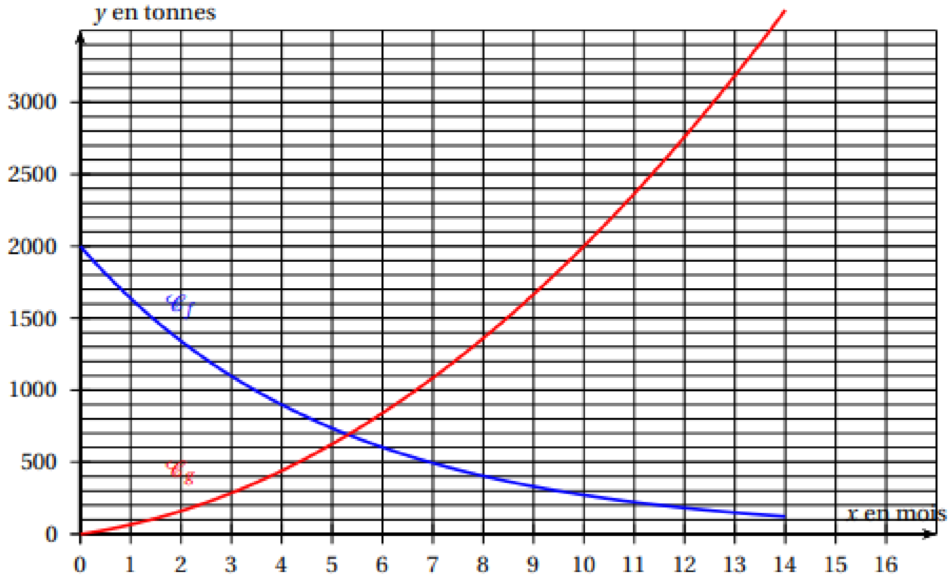
pour le produit A ;

— la fonction g définie sur $[0 ; 14]$ par

$$g(x) = 15x^2 + 50x$$

pour le produit B, où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.



Partie A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes.
   Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$ on pose $h(x) = f(x) + g(x)$.
On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0\,;\,14]$.

1. **a.** Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?
   b. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$ $h'(x) = -400\mathrm{e}^{-0,2x} + 30x + 50$.
2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ est :

x	0	14
variations de h'	-350 ↗	$h'(14) \approx 446$

   a. Justifier que l'équation $h'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ et donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de α.
   b. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.
3. Voici un algorithme :

```
Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Tant que Y ⩽ 0
    X ← X + 0,1
    Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Fin Tant que
```

   a. Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?
   b. En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à $0,001$ près de α après l'exécution de l'algorithme.
4. **a.** Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur $[0\,;\,14]$ est :

$$H(x) = -10\,000\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2.$$

   b. Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,\mathrm{d}x$.
   c. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.