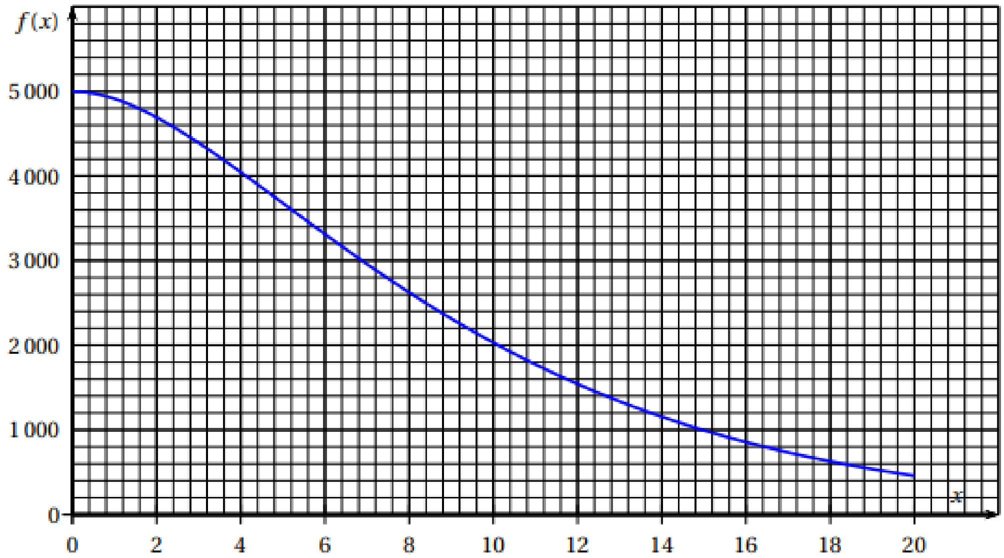
On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0 ; 20]$ par :

$$f(x) = 1000(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Partie A - Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.



1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3000$.

2. Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de [entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

Partie B - Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction [sur $[0; 20]$.
   Démontrer que pour tout x de $[0; 20]$, $f'(x) = -200x\mathrm{e}^{-0,2x}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0; 20]$.
   Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3000$ admet une unique solution α sur $[0; 20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par l'expression
   $F(x) = -5000(x+10)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f sur $[0; 20]$.
   Calculer $\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

Partie C - Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0; 20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.
Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

1. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ?
2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2; 8]$. Interpréter ce résultat.