

Exercice 1

On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto xy & x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les applications f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Exercice 2

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout réel y . Pourquoi la valeur $y = 1/4$ est-elle particulière? Est-ce que f est injective? Surjective?
2. Trouver deux intervalles I et J , aussi grands que possible, tels que l'application $I \rightarrow J$ donnée par la même formule que f soit une bijection.

Exercice 3

Soient f et g les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

1. Les applications f et g sont-elles bijectives?
2. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives?

Exercice 4

L'application $h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (p, q) &\longmapsto 2^p 3^q \end{aligned}$$

est-elle injective? Est-elle surjective?

Exercice 6

L'application $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x+y, xy) \end{aligned}$$

est-elle injective? Est-elle surjective?