Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000185]

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000199]

Exercice 3

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000202]

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000190]

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000200]

Exercice 6 Exponentielle complexe

Si $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000197]

Exercice 7

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$