Sous-espace vectoriel (sev)

Exercice 1. ($\bigstar$)
Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F, dire si F est un sous-espace vectoriel de E.

a. E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.
F est l'ensemble des fonctions paires.

b. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites divergentes.

c. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites convergentes.

d. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$).

e. $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.
F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

Exercice 2. ($\bigstar$)
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On considère $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{s} = (1, 0, -5)$ et $\overrightarrow{t} = (1, 1, 2)$.
Montrer : $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\right)$.

Exercice 3. ($\bigstar$)
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-4, 4, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2, 1)$, $\overrightarrow{s} = (-1, 2, 2)$ et $\overrightarrow{t} = (-1, 6, 7)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer : $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\right)$.

b. Déterminer une base de $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Exercice 5. ($\bigstar$)
Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

b. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

c. Compléter la base de F_1 en une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Compléter la base de F_2 en une base de $\mathbb{R}^3$.