Exercice 7. (★)
On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{w} = (-1,1,-1)$.

a. Montrer que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ dans la base $\mathscr{B}$.
En déduire les coordonnées de (x, y, z) dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 8. (★)
Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille, puis si c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

a. $A_1 = ((1,2),(1,-1))$.

b. $A_2 = ((1,4))$.

c. $A_3 = ((0,0))$.

d. $A_4 = ((1,-2),(2,3),(1,0))$.

Exercice 9. (★)

a. Montrer que $(\,(2,1),(1,1)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer les coordonnées de $(1,-3)$ dans cette base.

Exercice 12. (★★)
Toutes les réponses devront être justifiées.

1) Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

a. $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\right\}$

b. $B = \left\{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

c. $C = \left\{(2x-3y, x+1, -x+3y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

d. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\right\}$.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?