

**Exercice 8 BTS**

On considère l'équation différentielle (E) définie par :

$$y' - 2y = e^{2x} - 1$$

où y désigne une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$,

1. Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E_0) définie par : $y' - 2y = 0$.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Vérifier que la solution particulière de (E) qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + \frac{1}{2}.$$

5. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{2x} dx$ et en déduire la valeur exacte de $\int_0^1 f(x) dx$.

**Exercice 12 BTS**

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' - 3y' - 4y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.