Exercice 2 Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Montrer que $F := F_1 \cap \ldots \cap F_m$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $F := \text{vect}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et A, B deux sous-ensembles de E.

(1) Montrer que, si $A \subset B$, alors $\text{vect}\, A \subset \text{vect}\, B$.

(2) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{vect}\, A = A$.

(3) Montrer que, si $A \subset B \subset F$ et A engendre F, alors B engendre F.

Exercice 5 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 6 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est-elle libre ?

(2) Quel est le rang de la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$?

(3) Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $\mathbf{u} = (1, 1, \alpha, \beta)^t$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

Exercice 8 (1) On rappelle que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$ et $\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Sont-ils en somme directe ?

(2) Montrer que $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sont-ils en somme directe ?

Exercice 9 (1) Soient $F := \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ et $G := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y, z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs bases et leurs dimensions. Sont-ils en somme directe ?

(2) Soit $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y - z,\ t = x + y + z\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.