DST 1		30 septembre 2011
	MATHEMATIQUES	
2h 30		1ère S2-S3-S5-S6 Stanislas

Calculatrices interdites.

I (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $-x^4 - 2x^2 + 3 < 0$

b) $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$

c) $\sqrt{x^2+1} \geq 2x+1$

d) $\dfrac{-2x+5}{x-1} \leq \dfrac{-3}{x^2-3x+2}$

II (5 points)

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$.

a) Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E) et établir que l'équation (E) équivaut à l'équation (E_1) : $2(x^2 + \dfrac{1}{x^2}) - 9(x + \dfrac{1}{x}) + 14 = 0$.

b) On pose u= $x + \dfrac{1}{x}$. Calculer u^2.

Etablir que l'équation (E_1) équivaut à : $u = x + \dfrac{1}{x}$ et $2u^2 - 9u + 10 = 0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2u^2 - 9u + 10 = 0$.

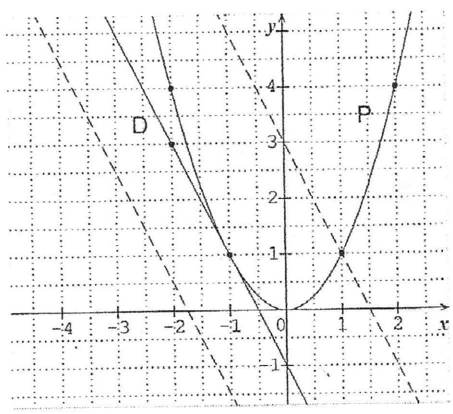
d) En déduire les solutions de l'équation (E).

e) Adapter la méthode précédente pour résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

III (5 points)

Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère :
la parabole P d'équation $y = x^2$ et la droite D d'équation $y = -2x + 1$

1) a) Déterminer le ou les points communs à P et D.
b) A l'aide de la figure ci contre, donner l'équation réduite d'une droite D', parallèle à D et n'ayant aucun point commun avec P .
Vérifier algébriquement.



2) On considère maintenant les droites d'équation :
$y = 3x + p$ où p est un réel quelconque.
a) Indiquer une propriété commune à toutes ces droites.
b) Déterminer p pour que la droite correspondante ait un seul point commun avec P.
On dit que la droite obtenue est tangente à P.

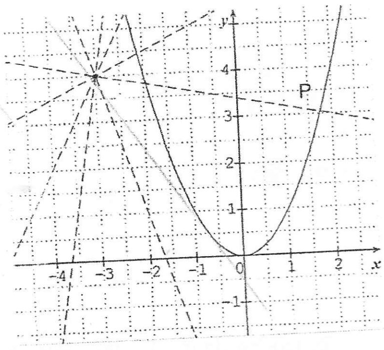
3) On considère toutes les droites passant par le point A(- 3 ; 4) sauf celle d'équation x = - 3 .

a) Expliquer pourquoi leur équation est de la forme :

$y = m(x + 3) + 4$.

b) Démontrer qu'il existe deux droites passant par le point A et tangentes à P.

Donner leurs équations.



4) **Bonus** Combien y a-t-il de tangentes à P passant par le point de coordonnées (1,5 ; 2,25) ? Donner leur coefficient directeur.

IV (4 points)

Somme et produit des racines d'une équation du 2nd degré

A) Questions préliminaires :

On considère l'équation (E) : $a x^2 + b x + c = 0$ où a ,b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Démontrer que : Si (E) a deux solutions X_1 et X_2 alors :

$$X_1 + X_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad X_1 \times X_2 = \frac{c}{a} .$$

B) On admet que deux nombres ayant pour somme S et pour produit P sont solutions de l'équation :

$X^2 - S X + P = 0$ (on a alors $S^2 - 4 P \geq 0$)

Soient x' et x'' les racines du polynôme $x^2 + 7 x - 4$.

Sans calculer x' et x'' :

1°) Calculer $x'^2 + x''^2$, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$, $\frac{x'-1}{x''} + \frac{x''-1}{x'}$:

2°) Former une équation dont les racines sont :

$$X' = \frac{x'^2 + x''}{x''} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}$$

BONUS (à ne faire que si le reste de l'exercice est résolu)

C) Démontrer que deux nombres ayant pour somme S et pour produit P sont solutions de l'équation :

$X^2 - S X + P = 0$