Baccalauréat Polynésie 18 juin 2025

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 — 5 points

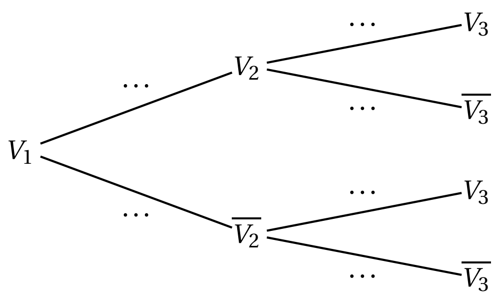
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- V_n l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{V_n}$ l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.
On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\,;\,1[$.

```
1   def simulation(n):
2       donnee = 1
3       liste = [donnee]
4       for k in range(n):
5           if rand() <0.1
6               donnee = 1 - donnee
7           liste.append(donnee)
9       return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer [1, 0, 0, 1].Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

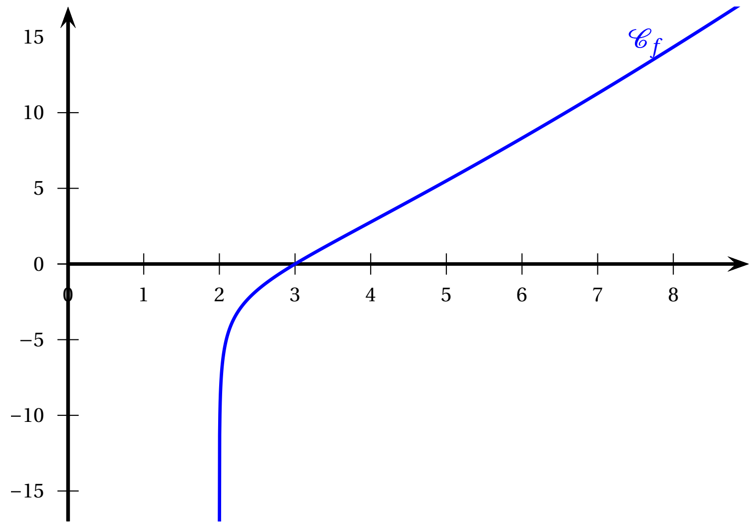
2. Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste [1, 1, 1, 1, 1] et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1].

Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3?

Exercice 3 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points suivants :

$$\text{A}(1\,;3\,;0),\quad \text{B}(-1\,;\,4\,;\,5),\quad \text{C}(0\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad \text{D}(-2\,;\,2\,;\,1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

   $$2x - y + z + 1 = 0.$$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

   a. Montrer que $\text{DH} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

   b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

   $$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-2k\\ y &=& -3k\\ z &=& 1+\ \ k\end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

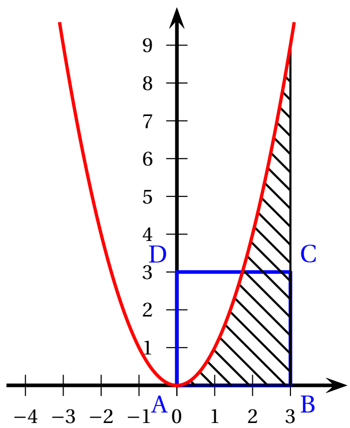
   La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

Exercice 4 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\}$ et
   $F = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\}$.

   Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.



2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.

   Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.

3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Affirmation n° 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \dfrac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = 2y - \mathrm{e}^x.$$

Affirmation n° 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $[0 ; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.