∽ Baccalauréat Polynésie 17 juin 2025 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 **5 points**

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatries*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.
L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son évènement contraire.
Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'évènement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2. **a.** Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire,
   b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
   c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie B

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.
On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie C

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.
On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{20}}{20}.$$

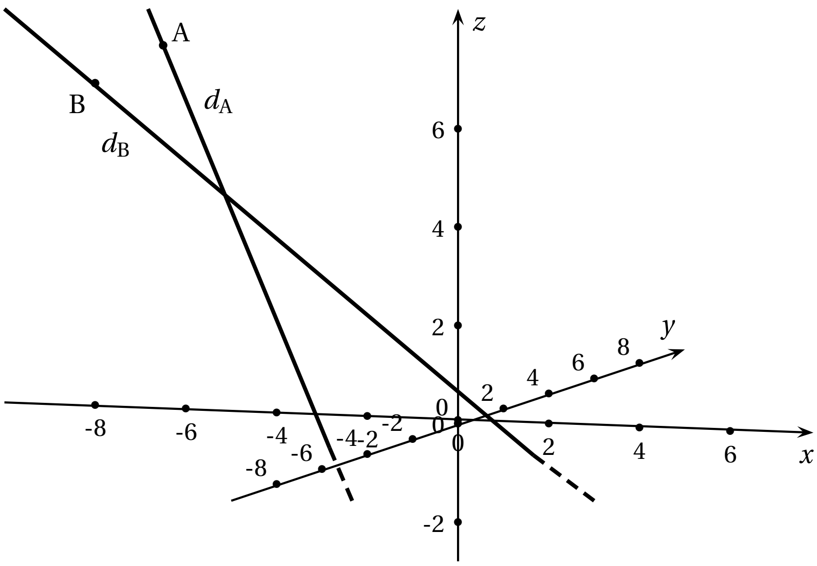
1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20}.
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 — 5 points

Deux avions sont en approche d'un aéroport.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.
L'unité des axes correspond à 1 km.
On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7~;~1~;~7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& -11+5t\\ y &=& -5+\ \ t \\ z &=& 11-4t\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_{A} caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.
   b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?
3. **a.** Démontrer que l'avion Alpha passe par la position E$(-3~;~-1~;~1)$.
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_{E} passant par E et perpendiculaire à la droite d_{A} est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

   c. Vérifier que le point F$(-1~;~-3~;~3)$ est le point d'intersection du plan P_{E} et de la droite d_{B}.
   d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.
4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).
   Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

Exercice 3 — 5 points

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \text{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n\text{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. **a.** On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\text{e}^{-x}.$$

   b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\text{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2. Justifier par le calcul que le point $A\left(1\ ;\ e^{-1}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{100}$.
   a. Donner une interprétation graphique de I_n.
   b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Calculer I_0.
3. **a.** Soit n un entier naturel.
   Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,
   $$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$
4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.
5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :
   $$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
   b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
  I = 1 - 1/e
  L = [I]
  for i in range(n):
      I = (i + 1)*I - 1/e
      L.append(I)
 return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice?

Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$, on considère les points A$(1\,;\,1\,;\,2)$, B$(5\,;\,-1\,;\,8)$ et C$(2\,;\,1\,;\,3)$.

Affirmation 4 : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est 30°.

5. On considère une fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty]$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0\,;\,+\infty]$ par :

$$h''(x) = x\ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $\left[\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[$.

ANNEXE : exercice 3