Espaces vectoriels et applications
2019-2020

# TD4 : Matrices

*Les exercices marqués du symbole ♣ sont à préparer sur feuille libre pour la séance indiquée dans le déroulé du module*

## Généralité

**Exercice 1.** Effectuer les opérations $A+B$ et $AB$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** Soient $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétiques et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer $M$ en une somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.

♣ **Exercice 3.**

1. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   Calculer $A^2$ et $A^3$. En déduire $A^n$ pour tout $n \geq 1$.

2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $B = A - I_4$.

   a) Calculer $B^2$ puis $B^k$ pour tout $k > 2$.

   b) En déduire $A^n$ pour tout $n \geq 1$.

   c) Que vaut alors la matrice $2A^n + nB^2 - (nB + I_4)^2$ ?

**Exercice 4.** Considérons les 2 matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $M^2 = -M + 2I$.
2. En déduire $M^3$ en fonction de $M$ et $I$.
3. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que pour tout $n$, $M^n = a_n M + b_n I$ et telles que $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.
4. En déduire $a_n$ et $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5.** Considérons la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
2. Calculer $A^2$, $A^3$.
3. En déduire $A^{-1}$ et $A^n$ pour tout $n \geq 1$.

## Applications linéaires : représentation matricielle

♠ **Exercice 6.** Soit $E$ un espace vectoriel, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $E$ et $\varphi$ un endomorphisme de $E$ défini par :

$$\varphi(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, \quad \varphi(e_2) = -2e_2 + e_3, \quad \varphi(e_3) = -e_1 + e_2 - e_3.$$

1. Écrire la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, préciser $Y = AX$.
3. Trouver le noyau de $\varphi$. $\varphi$ est-il injectif ? surjectif ?

♠ **Exercice 7.** Soit $\phi$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'application $\phi$.
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$. $\phi$ est-elle injective ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Im}(\phi)$. $\phi$ est-elle surjective ?

**Exercice 8.** Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (4x-2y, 6x-3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x-y) \end{array}$$

1. $f$ et $g$ sont-elles linéaires ?
2. Calculer $f \circ f$. Est-elle linéaire ?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Écrire la matrice de $f$ dans la base canonique puis la matrice de $f \circ f$.

♣ **Exercice 9.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $A$ sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $g(x,y,z) = (x - 2y + z, -x + z)$.

1. Quelle est l'image du vecteur $u = (2, -3)$ par l'application $f$ ?
2. Donner la matrice de $g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Les applications linéaires $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles définies ? si oui, donner leurs matrices dans les bases canoniques.
4. Établir l'expression analytique de $f \circ g$.

♠**Exercice 10** : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x,y,z) = (-x + y - z, -x + z, -2x + 2y).$$

1. Donner la matrice $M_1$ de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathcal{B}_2$ la famille définie par
$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,-1,1)\}.$$
Calculer $M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$.
3. Soit $\mathcal{B}_3$ la famille définie par
$$\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}.$$
Calculer $M_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}(f)$.

♠ **Exercice 11.** Soit $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{B}' = \{a,b,c,d\}$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :
$$a = e_1 - e_2, \quad b = e_1 - e_2 - e_3, \quad c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4, \quad d = -e_1 + 2e_2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a), f(b), f(c), f(d)$ et les exprimer dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

♣ **Exercice 12.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On suppose que $A$ est inversible. Calculer son inverse.

## Matrice de passage

♠ **Exercice 13.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère les vecteurs suivants :
$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (2,3,4), \quad u_3 = (4,9,16).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

**Exercice 14.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y) = (x - 2y, 3y).$$

1. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $u = e_1$ et $v = e_1 + e_2$.
   a) Montrer que $\{u, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer la matrice de $f$ dans cette nouvelle base de deux manières différentes.

♠ **Exercice 15** : Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + y).$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\overline{\mathcal{C}} = ((1, 1), (1, 2))$. Justifier que $\overline{\mathcal{C}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer les matrices de passage de $\mathcal{C}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et de $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$.
3. Soit $\overline{\mathcal{B}} = ((-1, 1, 1), (-2, 2, 1), (1, -2, -2))$. Montrer que $\overline{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\overline{\mathcal{B}}$ et de $\overline{\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{B}$.
4. Calculer $\mathrm{Mat}_{\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}}(f)$.

♠ **Exercice 16.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.

1. Montrer que $u_1, u_2, u_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage $P$ de la base canonique dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ dans la base canonique.
4. En déduire la matrice de $f$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
5. Calculer $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ dans la base canonique et puis dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
6. Retrouver la matrice de $f$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

♠ **Exercice 17.** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Pour $P \in E$, on pose $f(P)$ le polynôme tel que $f(P)(X) = (1 - X)P'(X) + 3P(X)$ (avec $P'$ le polynôme dérivé de $P$).

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $E$ ?

3. Soient $P_0 = 1, P_1 = 1 - X, P_2 = (1-X)^2, P_3 = (1-X)^3$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $E$.
   Déterminer la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ et calculer $(A')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis effectuer le produit $P \times P$. Que peut-on en déduire ?
   Exprimer $A^n$ en fonction des matrices $A'$, $P$ et de l'entier $n$.

**Exercice 18.** Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base $a$.
2. Soient $b = (0, 1, 1)$ et $c = (1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
5. Calculer $P^{-1}$.
6. Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Donner la relation entre $A, P$ et $D$.

♠ **Exercice 19.** Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$.
3. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer $P^{-1}$.
6. Quelle est la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ ?

## Noyau et Image d'une matrice

**Exercice 20.** Soit $E$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$ et $\varphi(e_3) = e_1 + e_3$.

1. Rappeler pourquoi la donnée de $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ définit un unique endomorphisme $\varphi$ et écrire le transformé du vecteur $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
2. Écrire la matrice de l'application linéaire $\varphi$ dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

**Exercice 21.** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ qui a pour matrice dans les bases canoniques $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver les dimensions de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

♠ **Exercice 22.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2'\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f(e_1) = e_1' + 2e_2', \quad f(e_2) = 2e_1' - e_2', \quad f(e_3) = -e_1' + e_2'.$$

1. Déterminer l'image du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par $f$.
2. Déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer le noyau et l'image de $f$.

## Rang d'une matrice

**Exercice 23.** Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.