

## Sujet 1

### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur 6 points (le total sera ramené sur 20 points) <sup>2</sup>

La clarté et la précision de l'argumentation ainsi que la qualité de la rédaction sont notées sur 2 points.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

#### EXERCICE 1 6 points

<b>Principaux domaines abordés :</b> Probabilités
---

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans;
- un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les évènements :

- $J$  : « le skieur a un forfait JUNIOR »;
- $C$  : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

*Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante*

#### Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité  $P(J \cap C)$ .
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR? Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file? Expliquer.

---

1. Afrique du Sud, Bulgarie, Comores, Djibouti, Kenya, Liban, Lituanie, Madagascar, Mozambique et Ukraine

2. Chaque exercice est noté sur 7 points au Liban.

**Partie B**

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale.  
Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .

**EXERCICE 2 6 points****Thème : Fonction exponentielle**

**Principaux domaines abordés :** Suites; Fonctions, Fonction logarithme.

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*

*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.  
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.  
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre?
  - a. 2 heures
  - b. 8 heures .
  - c. 9 heures
  - d. 13 heures
2. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 4 \ln(3x)$ .  
Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on a :
  - a.  $f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$
  - b.  $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
  - c.  $f(2x) = \ln(2) + f(x)$
  - d.  $f(2x) = 2f(x)$

3. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

On note  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal. La courbe  $\mathcal{C}_g$  admet :

- a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.      b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.
- c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.      d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0; 2]$  par :

$$h(x) = x^2(1 + 2\ln(x)).$$

On note  $\mathcal{C}_h$  la courbe représentative de  $h$  dans un repère du plan.

On admet que  $h$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; 2]$ .

On note  $h'$  sa dérivée et  $h''$  sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; 2]$ , on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)).$$

4. Sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{e}; 2 \right]$ , la fonction  $h$  s'annule :

- a. exactement 0 fois.      b. exactement 1 fois.  
c. exactement 2 fois.      d. exactement 3 fois.

5. Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_h$  au point d'abscisse  $\sqrt{e}$  est :

- a.  $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$       b.  $y = (6\sqrt{e}) \cdot x + 2e$   
c.  $y = 6e^{\frac{x}{2}}$       d.  $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4e.$

6. Sur l'intervalle  $]0; 2]$ , le nombre de points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_h$  est égal à :

- a. 0      b. 1      c. 2      d. 3

7. <sup>3</sup> On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 6.$$

On peut affirmer que :

- a. la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.      b. la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.  
c. la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.      d. la suite  $(u_n)$  est constante.

### EXERCICE 3 6 points

### Thème : Fonction exponentielle

**Principaux domaines abordés :** Suites; Fonctions, Fonction exponentielle.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  sa dérivée.

---

3. Uniquement au Liban

1.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
  - b. Démontrer que, pour tout réel  $x$  non nul,  $f(x) = 1 + 0,5x \left( 2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$ .  
En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2.
  - a. Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
  - b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f'(x) < 0$  est l'intervalle  $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$ .
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . On fera figurer la valeur exacte de l'image de  $4 + 2\ln(2)$  par  $f$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[-1 ; 0]$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction définie à la partie A.

1.
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge. On notera  $\ell$  la limite.
2.
  - a. On rappelle que  $f$  vérifie la relation  $\ell = f(\ell)$ .  
Démontrer que  $\ell = 4$ .
  - b.

On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
    u = 0
    n = 0
    while u ≤ a:
        u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
        n = n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### EXERCICE 4 6 points

### Thème : Fonction exponentielle

**Principaux domaines abordés :** Géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(5 ; 0 ; -1)$ ,  $B(1 ; 4 ; -1)$ ,  $C(1 ; 0 ; 3)$ ,  $D(5 ; 4 ; 3)$  et  $E(10 ; 9 ; 8)$ .

1.
  - a. Soit  $R$  le milieu du segment  $[AB]$ .  
Calculer les coordonnées du point  $R$  ainsi que les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
  - b.
  - c. Démontrer que le point  $E$  appartient au plan  $\mathcal{P}_1$  et que  $EA = EB$ .

2. On considère le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation cartésienne  $x - z - 2 = 0$ .

a. Justifier que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants.

b. On note  $\Delta$  la droite d'intersection de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère le plan  $\mathcal{P}_3$  d'équation cartésienne  $y + z - 3 = 0$ .

Justifier que la droite  $\Delta$  est sécante au plan  $\mathcal{P}_3$  en un point  $\Omega$  dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que  $MS = MT$  est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. a. Justifier que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ .

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.