**LIMITES DE FONCTIONS ET DE SUITES**

# I. Limites de Suites

1. Convergence.

• Soit $(u_n)$ une suite de nombre réels et L un nombre réel. La suite $(u_n)$ converge vers L si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L Contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite est convergente.

• La suite $(u_n)$ converge vers 0 ssi $(|u_n|)$ converge vers 0.
• La suite $(u_n)$ converge vers L ssi la suite $(u_n - L)$ converge vers 0 ; et L est unique.
• La limite d'une somme est la somme des limites.
• La limite d'un produit est le produit des limites.
• La limite d'un quotient est le quotient des limites.

2. Comparaison.

- S'il existe une suite $(v_n)$ de limite $+\infty$, un réel $\alpha > 0$ et un entier k tels que pour tout $n > k$, et $u_n \geq v_n$ alors $(u_n)$ a pour limite $+\infty$.

- S'il existe une suite $(v_n)$ de limite $-\infty$, un réel $\alpha > 0$ et un entier k tels que pour tout $n > k$, et $u_n \leq v_n$ alors $(u_n)$ a pour limite $-\infty$.

- S'il existe une suite $(v_n)$ de limite 0, un réel $\alpha > 0$ et un entier k tels que pour tout $n > k$, et $|u_n - L| \leq v_n$ alors $(u_n)$ a pour limite L.

• Cas particulier très important
pour tout $n > k$, et $|u_n - L| \leq q^n$ avec $n > 0$ et $0 < q < 1$ alors $(u_n)$ a pour limite L en $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$, et si $u_n \leq v_n$ alors à partir d'un certain rang on a : $L \leq L'$.

- Soit une suite $(u_n)$ de limite L et majorée par un réel M alors à partir d'un certain rang : $L \leq M$

- Soit une suite $(u_n)$ de limite L et minorée par un réel m alors à partir d'un certain rang : $m \leq L$

**Théorème des gendarmes**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$, et s'il existe un entier k tel que : $v_n < u_n < w_n$.
alors $(u_n)$ a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

3. Suites croissante - convergente.

- Soit une suite $(u_n)$ croissante et si elle a pour limite L alors à partir d'un certain rang : $u_n \leq L$
- Soit une suite $(u_n)$ décroissante et si elle a pour limite L alors à partir d'un certain rang : $u_n \geq L$

• Toute suite croissante **et** majorée est convergente.
• Toute suite décroissante **et** minorée est convergente.

4. Suites adjacentes.

- On dit que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes si les trois conditions suivantes sont réalisées :
  - $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante ;
  - pour tout entier $n$ : $u_n \leq v_n$
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

- Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes alors ces deux suites convergent vers la même limite L et $u_n \leq L \leq v_n$

## II. Fonctions.

Si une fonction $f$ est définie sur un intervalle I est dérivable en $a$, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = f(a)$

On dit que $f$ admet pour limite l en $a$.

### Les formes indéterminées

$+\infty$ ; $-\infty$ : Factorisation du terme "dominant". (terme de plus haut degré pour un polynôme)
$\infty/\infty$ : Factorisation des termes "dominants" puis simplification.
0/0 : Factorisation d'un terme tendant vers 0, puis simplification.
$0 \times \infty$ : peut en général se ramener à l'une des formes $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$.
Lorsque des racines carrées interviennent et que les méthodes ci-dessus ne donnent pas de résultat, on pourra multiplier par la quantité "conjuguée".

(Les notations $+\infty - \infty$ ; $\dfrac{\infty}{\infty}$ … sont des abréviations à ne pas utiliser dans un devoir rédigé)

### Limites et inégalités

I est un intervalle dépendant de l'endroit où la limite est cherchée :
$]a\,;+\infty[$ pour une limite en $+\infty$, $]x_0 - h\,; x_0 + h[$ pour une limite en $x_0$ etc…

**<u>Limites par comparaison</u> : conservation de l'ordre**

Si pour tout $x \in I$ $f(x) > g(x)$ et si $\lim g(x) = +\infty$ alors $\lim f(x) = +\infty$.

<u>Comparaison de limites</u>
Si pour tout $x \in I$ $f(x) < g(x)$, si $\lim f(x) = a$ et $\lim g(x) = b$ alors $a < b$.

**<u>Théorème des gendarmes</u> : Existence d'une limite**

**Si** pour tout $x \in \mathrm{I}$ $g(x) < f(x) < h(x)$ et si $\lim g(x) = \lim h(x) = a$ ,
**alors** $f$ admet une limite et $\lim f(x) = a$.

Ce théorème s'utilise sous la forme suivante :

• Si pour tout $x$ suffisamment grand $|f(x) - a| \leq g(x)$ et si $\lim g(x) = 0$ **alors** $\lim f(x) = a$.

Ce théorème est aussi valable pour une limite infinie mais ne sert plus pour l'existence de la limite

## Limite d'une composée de fonctions

a, b et l désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$ , alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$ .

Exemples : calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

## Limites obtenues par la dérivée

Si f est une fonction dérivable en $x_0$ alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

## Limites usuelles

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

<u>Exemple</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x} =$

$$\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x}{2x} = \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{2} \;\; ; \text{ or } \begin{cases} \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0} 3x = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

## Asymptotes à une courbe

(C) étant la courbe représentative de la fonction *f*.

**Asymptote (verticale) parallèle à (O*y*)**.

**Si** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (il peut s'agir d'une limite à droite ou à gauche seulement)

**alors** (C) a pour asymptote la droite d'équation $x = a$

**Asymptote (horizontale) parallèle à (O*x*)**.

**Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

**alors** (C) a pour asymptote la droite d'équation $y = b$.

**Asymptote oblique, asymptote courbe**.

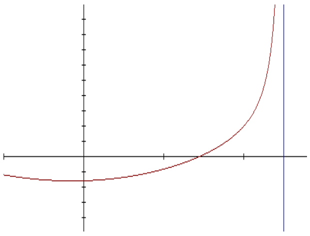
**Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

**alors** (C) a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$.

**Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = 0$

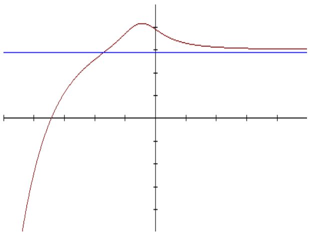
**alors** (C) a pour asymptote la courbe représentative de g.

3 cas à envisager :



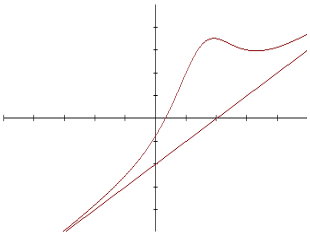
Asymptote verticale :

$x \to a$ et $f(x) \to \infty$



Asymptote horizontale :

$x \to \infty$ et $f(x) \to b$



Asymptote oblique :

$x \to \pm\infty$ et $f(x) - (ax + b) \to 0$

**a) Résultats :**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ |

Quand x tend vers ∞ :

- la limite d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré
- la limite d'une fraction est la limite du rapport de ses termes de plus haut degré

Fonctions composées :

- Si U(x) tend vers l quand x tend vers a, alors f(U) tend vers f(l) quand x tend vers a.

**b) Utilisation :**

- ▹ On ne calcule les limites qu'aux bornes des intervalles <u>ouverts</u>.
- ▹ Vérifier (ou prévoir) à l'aide de la calculatrice.
- ▹ Il est possible d'utiliser un changement de variables :

😐 exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$? On pose t = -x et on calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} -te^{-t}$ soit $\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$