Les Similitudes Complexes

Prérequis :

- le cours sur les nombres complexes a été fait ;
- la forme trigonométrique d'un nombre complexe (module, argument,...) est connue ;
- l'écriture complexe des transformations usuelles a été vue.

.

Introduction :

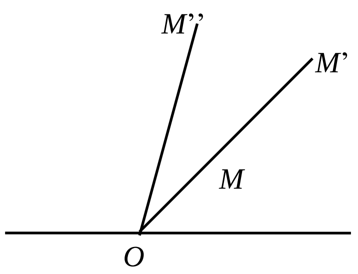
- faire un rappel des transformations connues ;
- on peut commencer par faire observer une frise, se référer à des motifs répétés mais qui n'ont pas la même taille (prendre un exemple que les enfants sont connaissent). Les dessins sont semblables.

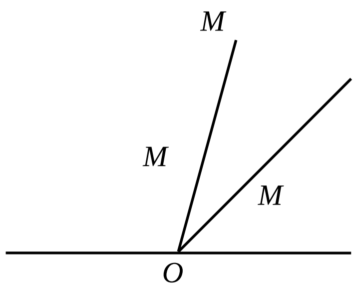
La question est : **Comment définir mathématiquement que deux dessins sont semblables ?**

Dans un premier temps on prend deux applications, bien connues, une homothétie et une rotation de même centre O. Et on va voir ce que l'on obtient en faisant la composée des deux.

On prend un point M quelconque par une transformation h on l'augmente $h(M) = M'$, ensuite on fait tourner ce point d'un certain angle $r(M') = M''$.

On fait la même chose mais cette fois-ci on commence par faire tourner le point et ensuite on augmente, on a donc $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M_2$. On remarque sans aucune difficulté que $M_2 = M''$





Prouvons que $r \circ h = h \circ r$

- On a dans le premier cas $r(h(\text{M})) = r(M') = M''$;

d'où $OM' = k.OM$, puis $OM'' = OM'$ (rotation conserve les distances) donc $OM'' = k.OM$

et $\theta = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) = (k.\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''})$ soit $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = \theta$

- On a dans le second cas $h(r(\text{M})) = h(M_1) = M_2$;

d'où $OM = OM_1$, puis $OM_2 = k.OM_1$ c'est à dire $OM_2 = k.OM$

et $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, k.\overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2})$ soit $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta$

d'où le résultat ($M'' = M_2$)

COURS.

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel k et qui conserve les angles orioentés. C'est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

On sait qu'un nombre complexe peut se mettre sous la forme $a = \rho.\, e^{i.\theta}$.
L'image d'un point par une application f peut s'écrire, sous forme complexe :

$z' = \rho.z$ lorsqu'il s'agit d'une homothétie de rapport ρ ; $\theta = 0$, angle nul ;
$z' = e^{i.\theta}.z$ lorsqu'il s'agit d'une rotation d'angle θ ; $\rho = 1$, rapport un ;
$z' = z + b$ b est l'affixe du vecteur de translation, rapport un et angle nul.

Ici nous avons $f(M) = M'' = M_2$; ce qui peut encore s'écrire, sous forme complexe :
Dans le premier cas : $z' = \rho.z$ et $z'' = e^{i.\theta}.z' = e^{i.\theta}.(\rho.z) = \rho.e^{i.\theta}.z = a.z$
Dans le second cas : $z_1 = e^{i.\theta}.z$ et $z_2 = \rho.z_1 = \rho.(e^{i.\theta}.z) = \rho.e^{i.\theta}.z = a.z$
Nous avons finalement : $z'' = a.z$, lorsque le centre est O

Une similitude directe du plan est la composé d'une homothétie et d'un déplacement (rotation ou translation). Si nous utilisons les écritures complexes de d et de h, nous avons :
$d : z' = e^{i.\theta}.z + b_o$. θ réel et b_o complexe
$h : z' = \rho.z + b_1$ ρ rapport de h et b_1 complexe
L'écriture complexe de $h \circ d = d \circ h$: $z' = \rho.(e^{i.\theta}.z + b_o) + b_1$

D'une manière générale nous pouvons donc écrire que l'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = a.z + b$

Si le centre est le point Ω d'affixe ω, nous avons, $z' = a.z + b$ et $\omega = a.\omega + b$; par différence on obtient sans problème : $z' - \omega = a.(z - \omega)$
le rapport de cette transformation est celui de l'homothétie ;
l'angle de cette transformation est celui de la rotation.

Si M a pour image M' par la similitude S de centre Ω (d'affixe ω), de rapport ρ et d'angle θ ; géométriquement nous avons les résultats suivants :

1. $\Omega M' = \rho.\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

2. $S(A) = A'$; $S(B) = B'$ c'est à dire $r(A) = A_1$; $h(A_1) = A'$ et $r(B) = B_1$; $h(B_1) = B'$

$\overrightarrow{A'B'} = \rho.\overrightarrow{A_1B_1}$ or $A_1B_1 = AB$ donc $A'B' = \rho.AB$

$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{AB}, \rho\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

$S(A) = A'$; $S(B) = B'$ $\Leftrightarrow$ $A'B' = \rho.AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$