TS **SUITES** feuille 301 a

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I soient a et b 2 réels

De l intervalle I tels que $a < b$

On suppose qu il existe 2 réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ sur I

On veut montrer que $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ (inégalité des accroissement finis)

1) soit u la fonction définie sur I par $u(x) = f(x) - mx$

Montrer que u est croissante sur I

En déduire que $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$

2)) soit v la fonction définie sur I par $u(x) = f(x) - Mx$

Montrer que v est décroissante sur I

En déduire que $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

3) on suppose qu il existe un réel $k > 0$ tel que $|f'(x)| < k$ sur I

Montrer que pour tout réels a et b de I $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp\left(-x^2\right), \quad \text{c'est-à-dire } f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

a. Étudier f (parité, sens de variation, limites).

b. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Tracer la portion de $(\mathscr{C})$ délimitée par ses points d'abscisses -2 et 3.

2. On se propose dans cette partie d'étudier l'équation (E) : $f(x) = x$.

a. Montrer que (E) ne peut avoir de solution négative.
A l'aide de l'étude des variations de la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

montrer que l'équation (E) admet une unique solution α, puis que α appartient à l'intervalle $\mathrm{I} = [0{,}5\,; 0{,}8]$.

b. Préciser le sens de variation de la fonction f' (dérivée de f) sur l'intervalle I. En déduire que pour tout x élément de I on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \quad \text{puis que} \quad \left|f'(x)\right| \leqslant 0{,}9.$$

c. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

i. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

ii. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leqslant 0{,}9\left|u_n - \alpha\right|.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$\left|u_n - \alpha\right| \leqslant 0{,}3 \times (0{,}9)^n.$$

Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?