Devoirs de Vacances

■ ■ ■

Partie I : Manipulation d'inégalités

Exercice 1. Déterminer

1. l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des réels x tels que $e^{x^2+x} \leq e$.

2. l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des réels x tels que $0 \leq (m+1)x + 2 - m$.

3. l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des réels x tels que $|x^2 + x + 1| > |x - 4|$.

Exercice 2. (Formule du binôme de Newton)

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer, par récurrence et en utilisant la formule du triangle de Pascal,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2. Soit a un réel positif.

a) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

b) En déduire que pour tout réel $\alpha \geq 1$, la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Soient a, b, c trois réels strictement positifs.

1. Montrer que $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$.

Indication : On pourra utiliser les fonctions $f(x) = \frac{(x+b+c)^3}{xbc}$ *puis* $g(x) = x + \frac{1}{x}$ *pour* $x \in]0, +\infty[$.

2. En déduire que $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Exercice 4. (L'inégalité triangulaire) Soient a et b deux réels.

1 . a) Montrer que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Indication : On pourra élever au carré et remarquer que $|a| = \max\{a, -a\}$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si a et b sont de même signe.

2. En déduire que $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité triangulaire à $|a| = |a - b + b|$.

Exercice 5. (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t, on pose $f(t) = \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2$.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

On supposera dans la suite que $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0$.

2 . a) Montrer que f est un trinôme en t.

b) En étudiant le signe de f, démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

3. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

a) Montrer que $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.

b) L'inégalité ci-dessus est-elle toujours stricte ?

Partie II : Raisonnement par récurrence

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

Exercice 8.

1. Démontrer par récurrence que pour tout naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 5.
Utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(n+1)^5$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 30.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: 9 divise $10^n + 1$.

1. Démontrer que si $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain n, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

2. La proposition $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Exercice 10. (Série harmonique) Pour $n > 1$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer que pour tout $n \geq 2$, S_n peut s'écrire comme le quotient d'un nombre impair par un nombre pair
Indication : On pourra raisonner par récurrence forte en distinguant les cas n pair et n impair.

Partie III : Techniques de calculs

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer, en utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence, les égalités suivantes.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 8 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

5. $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 12. Soit $X^3 + pX + q$ un polynôme à coefficients réels ayant trois racines réelles a, b, c.

1. En développant $(X-a)(X-b)(X-c)$, exprimer $a+b+c$, $ab+bc+ca$ et abc en fonction de p et q.

2. En déduire l'égalité $P'(a) \cdot P'(b) \cdot P'(c) = 4p^3 + 27q^2$.

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1. On note $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Simplifier l'expression de $f(x)$.

2. En déduire une expression simplifiée de $g(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$.

3. En utilisant un raisonnement analogue, déterminer une expression sans signe somme de la quantité $h(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2x^k$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On remarque que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

Exercice 15. (Factorisation de polynômes)

1. Écrire $X^4 + 1$ comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 2.

2. Faire de même avec $X^6 + 1$.

Partie IV : Trigonométrie

Exercice 16. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}.$$

Exercice 17.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

2. Interpréter graphiquement la double inégalité ci-dessus.

Exercice 18. Soit g la fonction définie par $g \ : \ x \mapsto x^2 \sin \frac{2\pi}{x}$.

1. Préciser le domaine D de définition de la fonction g et étudier sa parité.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation $g(x) = 0$.

3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$, et préciser pour quelles valeurs de x l'une des inégalités devient une égalité. En déduire la limite $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

4. Éudier la limite de g en $+\infty$, et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $g(x) \leq 2\pi x$. On admet que la droite d'équation $y = 2\pi x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g, i.e. $\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2\pi x = 0$.

5. À l'aide des questions précédentes, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 19. Soit $x \in I = [0, \frac{\pi}{2}[$. On rappelle que pour tout réel x appartenant à I, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Démontrer que pour tout $x \in I$, $2\sin x + \tan x \geq 3x$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Calculer

$$\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{x}{2^k}.$$

Partie V : Nombres complexes

Exercice 21. Soit z un nombre complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2+|1-z|^2$.

Exercice 22. (Sommes de cosinus et sinus) On note

$$E_n=\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}, \qquad C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta, \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta.$$

1. Calculer $(1-e^{i\theta})\cdot E_n$.

2. En déduire des expressions de E_n, C_n et S_n sans signe somme.

Exercice 23. Représenter l'ensemble des racines des équations $z^2-2\lambda z+1=0$ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24. (Nombres complexes et géométrie) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|z^2-1|=1$.

Pour $z\neq 0$, on note $z=|z|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$. Pour $z\notin\{-1,1\}$ affixe d'un point de (Γ) exprimer $|z|$ en fonction de θ.

Exercice 25. (Des inégalités) On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C},\ |z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|.$$

1. Montrer que pour tout $(u,v)\in\mathbb{C}^2$,

$$|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|.$$

2. Montrer que

$$\forall\ (z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}^4,\ \sum_{k=1}^{4}|z_k|\leq\sum_{1\leq i<j\leq 4}|z_i+z_j|.$$

Indication : On remarque que $\sum_{1\leq i<j\leq 4}|z_i+z_j|=|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$.

Partie VI : Étude de fonctions

Exercice 26. (Représentations graphiques) Représenter (sans utiliser ni calculatrice ni ordinateur) les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f\ :\ x\mapsto\max\{0,\sin x\}$.

2. $g\ :\ x\mapsto|\cos x|$.

3. $h\ :\ x\mapsto 1+\tan^2 x$.

4. $\varphi\ :\ x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$, (où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

Exercice 27. (Polynômes) On cherche les polynômes à coefficients réels tels que $\left(X^2+1\right)P''=6\cdot P$.

1. Montrer que si un polynôme vérifie l'égalité précédente alors il est de degré 3.

2. Conclure.

Exercice 28. (e^π ou π^e ?)

1. Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

2. En déduire (sans calculatrice) le plus petit des deux réels $a = e^\pi$ et $b = \pi^e$.

Exercice 29. Soient x et z deux réels strictement positifs et distincts de 1.
Trouver tous les réels y tels que $(x^y)^z = x^{(y^z)}$.

Exercice 30. (Optimisation) Quelle forme faut-il donner à une boîte cylindrique de volume donné V pour que son aire soit aussi petite que possible (les deux faces circulaires étant comprises) ?

Partie VII : Calcul Intégral

On rappelle que si u et v sont des fonctions continues, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exercice 31. (Calculs d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx.$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx.$

I.P.P. exp, cos

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx.$

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}$.

5. $I_5 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx.$

7. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

9. $I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$

10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

Exercice 32. (Intégrales de Wallis) Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties avec les fonctions cosinus et $\sin^{n-1}$, que pour tout $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On rappelle que $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

4. La formule de Wallis.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$.

b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \sin(\pi x)\, dx$.

1. Calculer I_0 puis I_1.

2. Former une relation entre I_{n+2} et I_n.
Utiliser une intégration par parties avec les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{\cos \pi x}{\pi}$.

Exercice 34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$. On admettra que $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

1. Calculer I_1. Montrer que la suite (I_n) décroît.

2. Calculer $I_n + I_{n+2}$. En déduire la limite de la suite (I_n). Expliciter pour $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1}.

3. Démontrer les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

b) $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{p}\right) = \ln 2$.

Exercice 35. Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln(t))\, dt \text{ et } G(x) = \int_1^x \sin(\ln(t))\, dt.$$

1. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \cos(\ln(x)) - 1 + G(x) \text{ et } G(x) = \sin(\ln(x)) - F(x).$$

2. Expliciter les fonctions F et G.

Partie VIII : Calculs de limites

Exercice 36. (Calculs de limites) Déterminer la valeur des limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}\right)$.

2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}\right)$.

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2x-1}\right)$.

4. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x\cos x+3}{2x^2+1}$.

5. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{2x^2-50}$.

Exercice 37.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

2 . a) Trouver un polynôme à coefficients réels P de degré 3 tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = P(x+1) - P(x).$$

b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans signe somme.

3. Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (u_n).

Exercice 38. (Suite de Fibonacci et Nombre d'or) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Trouver des réels a, b, λ et μ tels que

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda a^n + \mu b^n.$$

2. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 39. (La constante d'Euler) Dans cet exercice, on montre qu'il existe un nombre réel γ, appelé constante d'Euler, tel que $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on notera $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est appelée série harmonique.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout entier n plus grand que 2,

$$\frac{1}{n} \leq H_n - \ln n \leq 1.$$

3. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante.

4. Conclure.