Espaces vectoriels et applications
2019-2020

TD5 : Déterminants

Les exercices marqués du symbole ♣ sont à préparer sur feuille libre pour la séance indiquée dans le déroulé du module

Propriétés du déterminant

Exercice 1 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$, 2 matrices 4×4 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & b_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

Soit $C \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$, la matrice définie par :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 + d_1 & c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 + d_2 & c_2 & b_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 + d_3 & c_3 & b_3 + d_3 \\ a_4 & b_4 + d_4 & c_4 & b_4 + d_4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\det(C)$. Justifier
2. Montrer que $\det(C) = \det(A) + \det(B)$
3. En déduire une relation entre $\det(A)$ et $\det(B)$.
4. Quelle propriété générale du déterminant peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 : Démonter la proposition suivante :

> Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue en ajoutant à une colonne de A, une combinaison linéaire des autres colonnes de A. Alors on a :
>
> $$\det(B) = \det(A).$$

Calcul de déterminants

Exercice 3 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 10 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel m, la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. On considère le cas où $m = -1$. Calculer l'inverse de A_{-1} de deux manières différentes :
   (a) En utilisant la formule avec la comatrice.
   (b) En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice 6 : En utilisant la formule avec les comatrices, calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$