DENOMBREMENT

1 Dénombrer des listes

Définition 1 : Une liste est une suite d'éléments ordonnés d'un ensemble E. Une liste induit donc une notion d'ordre.

1.1 Permutation

Définition 2 : Une permutation de n éléments d'un ensemble E est une liste de n éléments de cet ensemble E.

Théorème 1 : Le nombre de permutations d'un ensemble$E$ de n éléments est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

$n!$ est appelé « factorielle n ». Par convention, on pose $0! = 1$.

1.2 Arrangement

Définition 3 : Un arrangement de p éléments d'un ensemble E de n éléments ($p \leqslant n$) est une liste composée de p éléments distincts 2 à 2 de l'ensemble E

Remarque :

- Une permutation de l'ensemble E est un arrangement des n éléments de E.
- Un arrangement peut être associé à p tirages successifs sans remise dans une urne qui contient n éléments.

Théorème 2 : Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble de n éléments est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Par convention, on a : $A_n^0 = 1$

1.3 p-liste

Définition 4 : Une p-liste est une liste de p éléments distincts ou non d'un ensemble E de n éléments.

Théorème 3 : Le nombre de p-liste dans un ensemble E à n éléments est égal à :

$$n^p$$

2 Combinaison

2.1 Définition

Définition 5 : Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

Remarque : Dans une combinaison, contrairement à une liste l'ordre n'intervient pas. On peut alors associer une combinaison à un tirage simultanée de p éléments dans une urne qui en contient n.

2.2 Nombre de combinaisons

Théorème 4 : Le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble E de n éléments ($0 \leqslant p \leqslant n$) est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On prononce $\binom{n}{p}$: « $C\ n\ p$ ».

3 Résumé des situations

3.1 Critères à retenir

Les critères sont : les éléments peuvent-ils être répétés ? L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On peut résumer les différentes réponses par le tableau suivant :

Critères	Les éléments peuvent être répétés	Les éléments sont distincts
On tient compte de l'ordre	Utiliser des p-listes	Utiliser des arrangements
On ne tient pas compte de l'ordre	Hors programme !	Utiliser des combinaisons

4 Formules

4.1 Formules relatives aux combinaisons

Théorème 5 : Pour tous n et p, tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3) $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

4) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

4.2 Triangle de Pascal

Grâce à la dernière série de formules, on peut remplir le tableau suivant, appelé **triangle de Pascal**

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

On a pour les cases rouges :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} \quad \text{ce qui donne} \quad 4 + 6 = 10$$

4.3 Le binôme de Newton

Théorème 6 : Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Soit encore :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$