TS **NOMBRES COMPLEXES**

A FORME ALGEBRIQUE

1) définition

On considère un nombre imaginaire i tel que : $i^2 = -1$

Un nombre complexe z est de la forme : z = a + ib où a et b sont des réels

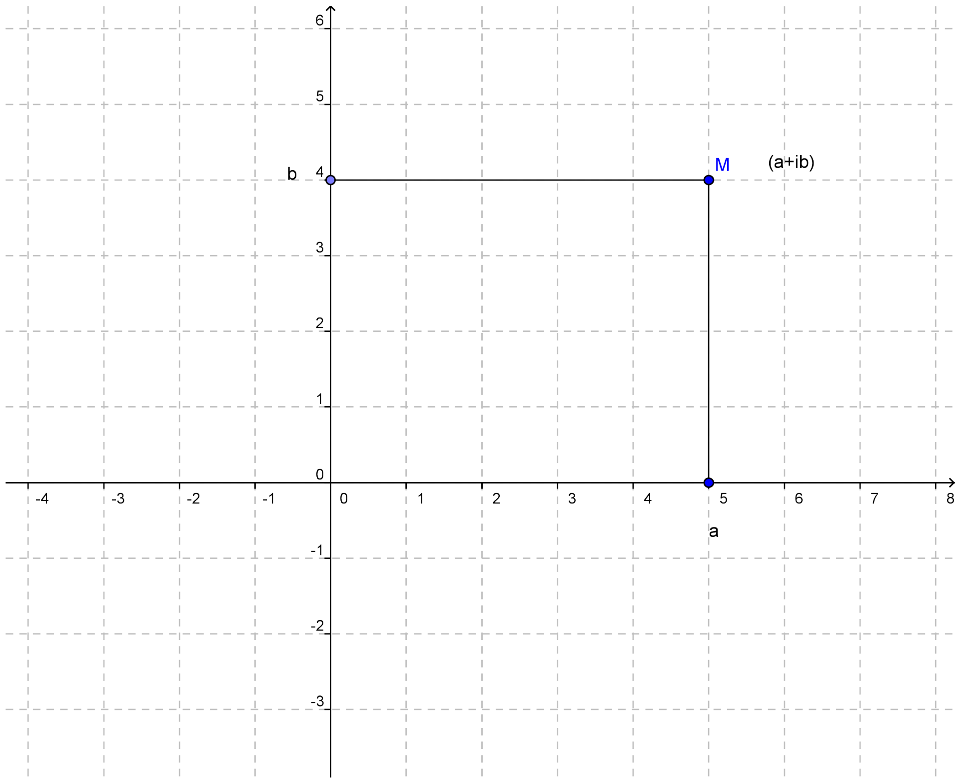
l' ensemble des nombres complexes est noté ***C***

a est la partie réelle de z , on note a = *Re*(z) , b est la partie imaginaire de z , on note b = *Im*(z)

si b = 0 alors z est réel , si a = 0 alors z est un imaginaire pur

2) affixe d' un point

Dans un repère orthonormé (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , le point M d' affixe a + ib est le point de coordonnées (a , b) , on note M(a + ib)



3) conjugué d' un nombre complexe

Soit z = a + ib un nombre complexe , alors le conjugué de z noté $\overline{z}$ est égal à :

$\overline{z}$ = a – ib

si M a pour affixe z et M' a pour affixe $\overline{z}$ alors M et M' sont symétrique par rapport à l' axe des réels

z est réel ssi z = $\overline{z}$ z est imaginaire pur ssi $\overline{z}$ = -z

pour tout nombre complexe z : z + $\overline{z}$ = 2 *Re*(z) z - $\overline{z}$ = 2i *Im*(z)

si z = a + ib alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$, $z\overline{z}$ est un réel positif

application : $\dfrac{a' + ib'}{a + ib} = \dfrac{(a' + ib')(a - ib)}{a^2 + b^2}$ (a + ib ≠ 0)

Quelque soient les nombres complexes z_1 et z_2

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ($z_2 \neq 0$)

pour tout entier n : $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$

4) équation du second degré

Soient a , b et c trois réel tels que a ≠ 0

considérons l' équation : az^2 + bz + c = 0

Δ = $b^2 - 4ac$

si Δ ≥ 0 alors voir le cours de 1ere S

si Δ < 0 alors l' équation admet deux racines complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

B <u>FORME TRIGONOMETRIQUE</u>

1) module d' un nombre complexe

Dans un repère orthonormé (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , soit M un point d' affixe z

alors le module de z noté $|z|$ est égal à la distance OM

si z = a + ib alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Quelque soient les nombres complexes z_1 et z_2

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad |(\frac{z_1}{z_2})| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

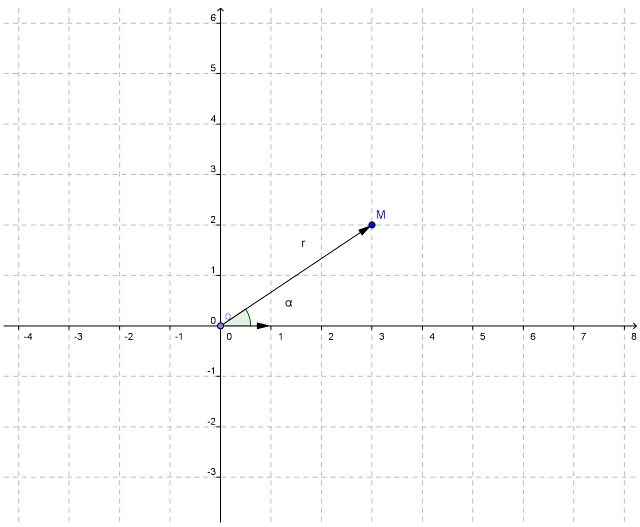
pour tout entier n $|z_1^n| = (|z_1|)^n$

AB = $|z_A - z_B|$

2) argument d' un nombre complexe non nul

Dans un repère orthonormé (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , soit M un point d' affixe z ≠ 0

On appelle argument de z noté arg(z) l' angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$)



si $z \neq 0$ et $z = x + iy$ alors

si $\alpha = \arg(z)$ alors $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

pour tous complexes non nuls z_1 et z_2 , pour tout entier n

$arg(z_1 \times z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ **[2∏]**

$arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2)$ **[2∏]**

$arg(z_1^n) = n \times arg(z_1)$ **[2∏]**

3) forme trigonométrique d' un nombre complexe

si z est un complexe non nul de module r et d' argument α ,

alors la forme trigonométrique de z est: $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

4) forme exponentielle

soient α et β deux réels , alors $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ $\quad \dfrac{1}{e^{i\alpha}} = e^{i(-\alpha)}$ $\quad \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$

pour tout entier relatif n : $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$

si r = $|z|$ et α = arg(z) alors z = r $e^{i\alpha}$ (forme exponentielle)

formule de moivre : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

formules d' euler : $\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$

$\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

C <u>APPLICATIONS GEOMETRIQUES</u>

1) distance et angles

Dans un repère orthonormé (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$)

$|z_B - z_A|$ = AB et si $A \neq B$ $\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB}$

arg($z_B - z_B$) = ($\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$) ($A \neq B$)

arg($\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$) = ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$) ($A \neq B$ et $C \neq D$)

2) translation

Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$,

soit M un point d' affixe z et M ' d' affixe z ' tel que M ' = t(M) alors

$$z' - z = z_{\vec{w}}$$

3) homothétie

Soit h l' homothétie de centre Ω (ω) et de rapport k

soit M un point d' affixe z et M ' d' affixe z ' tel que M ' = h(M) alors

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

4) rotation

Soit r la rotation de centre Ω (ω) et d' angle α

soit M un point d' affixe z et M ' d' affixe z ' tel que M ' = r(M) alors

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$