ECE Paris - Ecole d'ingénieurs

Cours de Mathématiques

ING 1 - Année 2019/2020

LIVRE 1

Table des matières

CHAPITRE 1

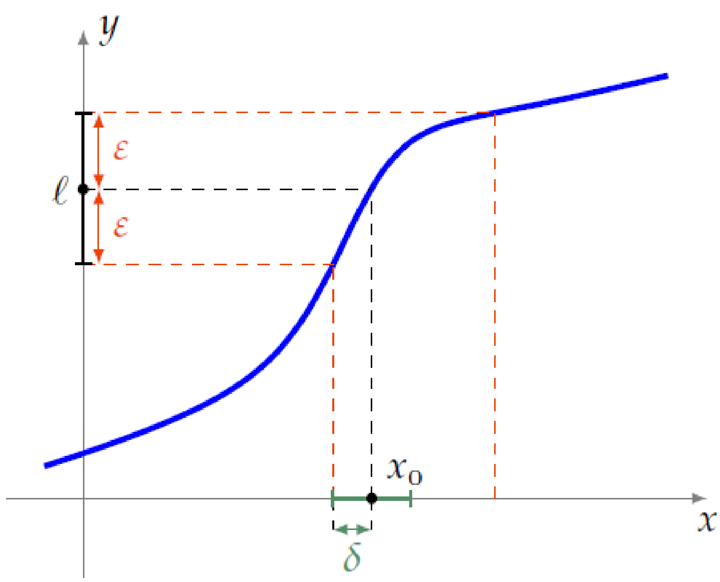
Fonctions réelles : compléments

1.1 Limites

Définition. Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point n'appartenant pas nécessairement à I mais tel que f soit définie au voisinage de x_0. La fonction f admet en x_0 une **limite** ℓ si pour chaque nombre positif ε, aussi petit que l'on veut (infinitésimal), on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour tous les x de $\mathbb{R}$ différents de x_0 vérifiant $|x - x_0| < \delta$, l'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ est satisfaite.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.
Le réel ℓ est alors **unique** et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



Définition. On dit que :
• La fonction f admet à **droite** de x_0 une limite ℓ^+, ceci est noté $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+$, si

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell^+| < \varepsilon.$$

• la fonction f admet à **gauche** de x_0 une limite ℓ^-, ceci est noté $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$, si

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell^-| < \varepsilon.$$

Remarque. Si la fonction f admet une limite en x_0, alors ces limites à gauche et à droite de x_0 coincident et valent $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Réciproquement, si la fonction f admet à gauche de x_0 une limite ℓ^- et à droite de x_0 une limite ℓ^+ et si $\ell^- \neq \ell^+$ alors la limite de f en x_0 n'existe pas.

Exemple

La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

On définit aussi les limites infinies.
Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition. On dit que :
• f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad | x - x_0 |< \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
• f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad | x - x_0 |< \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

On définit de la même manière la limite en l'infini.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :
• f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

- f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in I \quad x>B \implies f(x)>A$$

On note alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty,a[$.

Exemples

1. On a les limites classiques suivantes pour tout $n\geq 1$:
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^n=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n=\begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$.

2. Soit $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ avec $a_n>0$

et $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ avec $b_m>0$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}=$$

1.1.1 Propriétés des limites

Proposition. Soient f et g deux fonctions définies sur I, $x_0\in I$ et $a\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f+g=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f+\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} fg=(\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f)(\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g)$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} a\ f=a\ \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \dfrac{f}{g}=\dfrac{\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f}{\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g}$ avec g non nulle sur I.

Théorème. Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0) telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=y_0$ et soit g une fonction définie dans un voisinage de y_0 telle que $\lim\limits_{y\longrightarrow y_0} g(y)=\ell$, alors

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}(g\circ f)(x)=\ell$$

Formes indéterminées. Voici une liste des formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \ ; \ 0 \times \infty \ ; \ \frac{\infty}{\infty} \ ; \ \frac{0}{0} \ ; \ 1^{\infty} \ ; \ \infty^{0}.$$

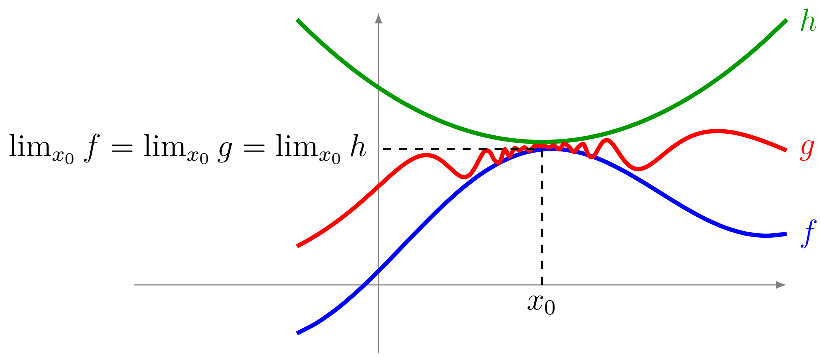
Enfin voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité.

Proposition. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g = +\infty$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f = -\infty$.
- **Théorème des gendarmes :**

$$\text{Si } f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x \longrightarrow x_0} f = \lim_{x \longrightarrow x_0} h = \ell \in \mathbb{R},$$

$$\text{alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} g = \ell.$$



Exemple

Soit $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{\star}$. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

1.1.2 Limites usuelles

Ce qu'il faut connaître.

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty.$ Si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0.$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$ Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0.$ Si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty.$

Croissances comparées

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

1.1.3 Comparaisons de fonctions au voisinage d'un point

Définition.

1. Les deux fonctions f et g sont équivalentes en x_0, noté $f \sim_{x_0} g$ ou $g \sim_{x_0} f$, si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = 1$ (avec g non nulle au voisinage de x_0).

2. La fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 ou f est un petit o en x_0, noté $f = o(g)$ si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$ (avec g non nulle au voisinage de x_0).

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\ln(1+x)\sim_0 x$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ainsi $e^x-1\sim_0 x$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ soit $\sin x\sim_0 x$
4. $x^3+\sqrt{x}\sim_{+\infty} x^3$ puisque ...
5. $x^3+\sqrt{x}\sim_0 \sqrt{x}$ car ...
6. En $+\infty$, $x^3=o(x^4)$ puisque ...
7. En 0, $x^4=o(x^3)$ car ...

Proposition.

1. Si $f\sim_{x_0}\varphi$ et $g\sim_{x_0}\psi$ alors $fg\sim_{x_0}\varphi\psi$ et $\dfrac{f}{g}\sim_{x_0}\dfrac{\varphi}{\psi}$.
2. On peut composer à droite par une fonction : Si $f\sim_{x_0} g$ et $\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)=x_0$ alors $f\circ\varphi(t)\sim_a g\circ\varphi(t)$.

Exemples

1. On a $\ln(1+x)\sim_0 x$ et $\sin x\sim_0 x$ d'où ...
2. On a $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ et $\ln(1+x)\sim_0 x$ donc ...

Attention

1. Si $f\sim_{x_0}\varphi$ et $g\sim_{x_0}\psi$ on n'a pas forcément $f+g\sim_{x_0}\varphi+\psi$.
2. On ne peut pas composer à gauche par une fonction : $f\sim_{x_0} g$ n'entraîne pas $\varphi\circ f\sim_{x_0}\varphi\circ g$.

Exemples

1. $f(x)=x^3+x\sim_{+\infty} x^3$, $g(x)=-x^3+x^2\sim_{+\infty} -x^3$ alors que $f(x)+g(x)=x+x^2\sim_{+\infty} x^2\neq 0$.
2. $x^3+x\sim_{+\infty} x^3$ et e^{x^3+x} n'est pas équivalente à e^{x^3} en $+\infty$.

1.2 Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction.

Définition. On dit que :
• f est **continue en un point** $x_0 \in I$ si f admet une limite en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

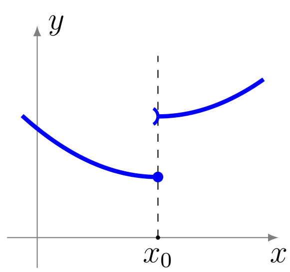
• f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.
• f est **continue à droite** (respectivement **à gauche**) en x_0 si et seulement si

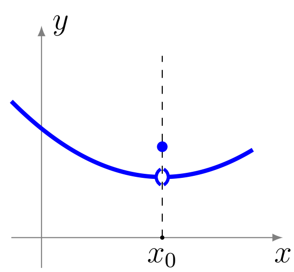
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\text{respectivement } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)).$$

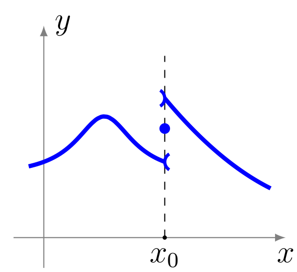
• f est **continue par morceaux** sur I si elle est continue sur tous les sous-intervalles ouverts de I et que les limites de cette fonction, à droite et à gauche de I, sont finies.

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe sans lever le crayon, c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Cas de discontinuité d'une fonction f en un point x_0 :
— f n'est pas définie au point x_0.
— $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas (Figures 1 et 3).
— $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (Figure 2).







Exemples

Les fonctions suivantes sont continues :
— une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$,
— une fonction constante sur $\mathbb{R}$,
— une fonction rationnelle sur son domaine de définition,
— la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
— les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,
— la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,
— la fonction exp sur $\mathbb{R}$,
— la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

Proposition. Soient $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un points $a \in I$. Alors :

- λf est continue en a (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en a,
- $f.g$ est continue en a,
- si $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.

La composition de fonctions conserve aussi la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple

Soient $g(x) = e^x$ et $f(x) = \sqrt{x}$. Déterminer le domaine de continuité de $g \circ f$.

1.2.1 Prolongement par continuité

Définition. Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
• On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x \to x_0} f$.
• On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemples

— Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

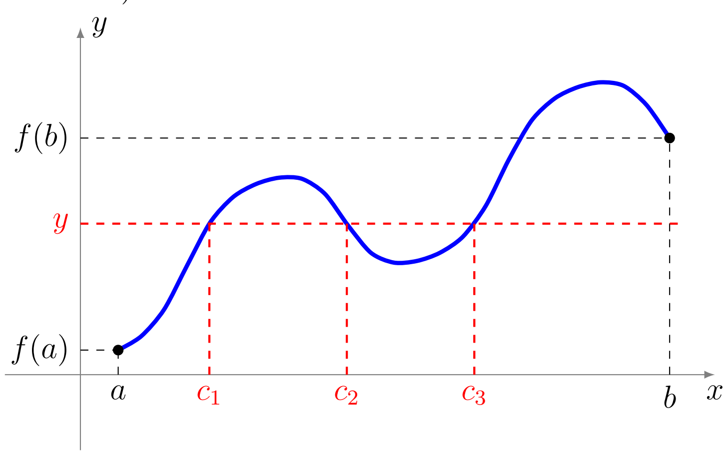
— Même question pour la fonction $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

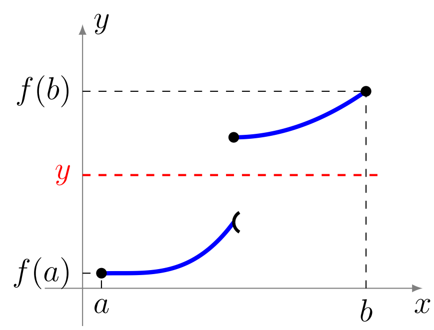
— Même question pour la fonction $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1.2.2 Propriétés des fonctions continues

Théorème. **(Théorème des valeurs intermédiaires)**
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que $f(a) \leq f(b)$.
Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.

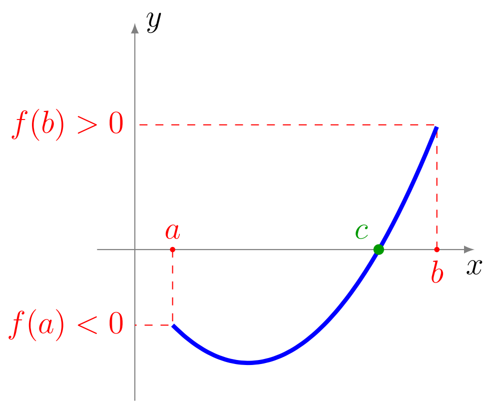
Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**.
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Remarque. L'hypothèse $f(a) \cdot f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Si de plus f est strictement monotone, alors c est unique.

Démonstration : Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. ❇

Exemples

1. L'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet une solution dans $[0, \pi]$. En effet,

2. Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. En effet,

1.3 Dérivabilité

Définition. Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I.
• On dit que f est **dérivable** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.
La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi,

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0^+. Dans ce cas,

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0^-. Dans ce cas,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• Si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, alors f est dérivable en x_0.
• Graphiquement, $f'(x_0)$ est la pente (ou le coefficient directeur) de la tangente à la courbe de f en x_0.
• f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.
• La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$ appliqué au point x_0.

Exemples

1. En utilisant le taux d'accroissement, calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

2. Même question pour $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

3. Même question pour $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{1-\sqrt{2}\cos x}$.

1.3.1 Dérivées successives

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
• Si la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f.
Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

• Si la **dérivée n-ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est n **fois dérivable**.
• Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est C^n sur I (**de classe** C^n).

On a une formule de dérivation intéressante.

Définition. Formule de Leibnitz
Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors le produit $f \cdot g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x),$$

avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence.

❇

Exemple

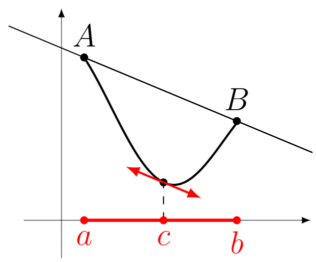
Calculer la dérivée d'ordre n de $h(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 1)$, pour tout $n \geq 0$.

1.3.2 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème. (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
- f est **continue** sur $[a,b]$,
- f est **dérivable** sur $]a,b[$.

alors, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$



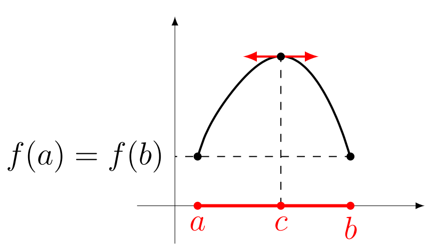
Interprétation géométrique : il existe **au moins** un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.
Interprétation cinématique : lorsqu'une voiture réalise un parcours à la moyenne de 90 km/h, il existe un instant du trajet en lequel sa vitesse instantanée est de 90 km/h.

Exemple

Soit f la fonction logarithme définie sur $[1, e]$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (1, 0)$ et $B = (e, 1)$.

Théorème. (Théorème de Rolle)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
- f est **continue** sur $[a,b]$,
- f est **dérivable** sur $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe **au moins** un point du graphe de f où la tangente est horizontale.
Interprétation cinématique : un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.
'

Exemple

Soit P la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

1.3.3 Calcul des limites

Le théorème qui suit permet de lever des indéterminaisons dans le cas de quotients de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Ce résultat est attribué au mathématicien français Guillaume de l'Hospital (ou de l'Hôpital) parce qu'il est le premier à l'avoir publié.

Corollaire. (Règle de L'Hospital)
Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$.
On suppose que
- $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$,
- $f(a) = g(a) = 0$.

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Première généralisation : Le corollaire précédent s'applique à des fonctions dont la limite en a est infinie.
Deuxième généralisation : Les résultats précédents sont valables pour x tendant vers un infini.
Itérations : La règle de L'Hospital quelle que soit sa forme peut être itérée.
En effet, cette règle dit en substance, que pour calculer la limite d'un quotient, on peut remplacer les fonctions par leurs dérivées. Mais à leur tour, on peut remplacer ces dérivées par leurs propres dérivées, c'est à dire par les dérivées secondes des fonctions initiales et ainsi de suite.

Exemple

Calculer la limite en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Calculer la limite en 1 de $\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$.

1.4 Comportement asymptotique

1.4.1 Asymptote oblique

Définition. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
On dit que $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) une **asymptote oblique** Δ d'équation $y = ax + b$ si et seulement si

$$\lim_{\pm\infty}(f(x) - y) = 0$$

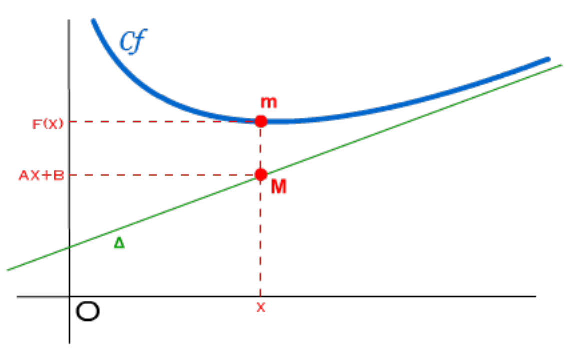


Figure 1.1 – Asymptote oblique

Exemple

Soit $f(x) = 2x - 7 + \dfrac{1}{x}$. Monter que $\Delta : y = 2x - 7$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

1.4.2 Asymptote horizontale

Définition. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = b$.
On dit que $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$ si et seulement si

$$\lim_{\pm\infty}(f(x) - y) = 0$$

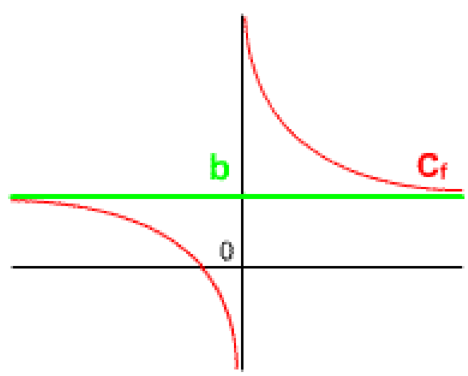


FIGURE 1.2 – Asymptote horizontale

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^x) + 3$. Monter que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale et déterminer son équation.

1.4.3 Asymptote verticale

Définition. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si et seulement si

$$\lim_{a}(f(x)) = \pm\infty$$

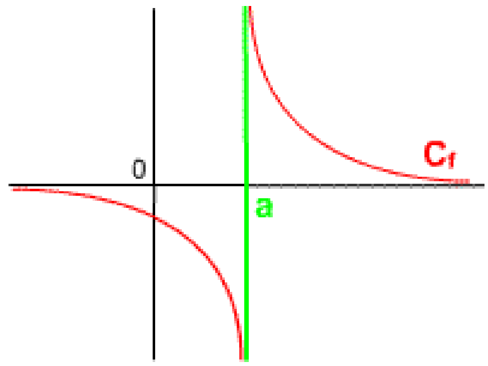


FIGURE 1.3 – Asymptote verticale

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$. Monter que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale et déterminer son équation.

1.5 Exercices

Exercice 1. 1. Vérifier que

a) $e^x \sim_0 1 + x$ b) $\sqrt{1+x} \sim_0 1 + \dfrac{x}{2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \sim_0 1 - \dfrac{x}{2}$

d) $\cos x \sim_0 1 - \dfrac{x^2}{2}$ e) $x \sim_0 x$ f) $a^x \sim_0 1 + x \ln a, \quad a > 0.$

g) $(1 + x)^\alpha \sim_0 1 + \alpha x.$

Exercice 1. 2. Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un point $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 1. 3. Soit $f : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

Exercice 1. 4. On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) &= x^2 \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 1. 5. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $x^2 \sin x$.

Exercice 1. 6. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

a. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Exercice 1. 7. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

Exercice 1. 8. Utiliser la règle de l'Hospital pour déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 5^x}{5x}$. c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

CHAPITRE 2

Fonctions réciproques

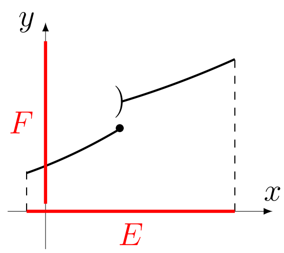
2.1 Injection, surjection, bijection

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

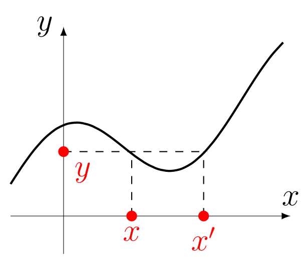
2.1.1 Fonction injective

Définition. f est **injective** ou est une **injection** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
- $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;
- tout élément de F a **au plus** un antécédent par f (et éventuellement aucun).

La fonction f représentée ci-dessous est injective :



Voici une fonction non injective :

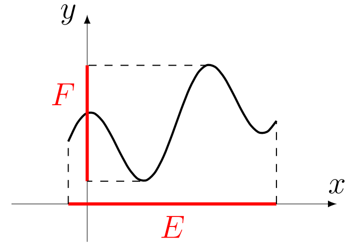


2.1.2 Fonction surjective

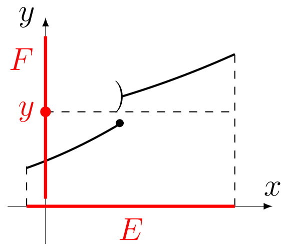
Définition. f est **surjective** ou est une **surjection** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
- $\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x)$;
- tout élément de F a **au moins** un antécédent par f.

Remarque. Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

La fonction f représentée ci-dessous est surjective :



Voici une fonction non surjective :



Exemples

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

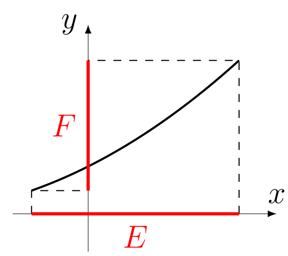
2. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Montrer que g est injective mais pas surjective.

2.1.3 Fonction bijective

Définition. f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective c'est-à-dire si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
- $\forall y \in F, \quad \exists\,!\, x \in E, \quad y = f(x)$.
- tout élément de F a **un et un seul** antécédent par f.

Remarque. L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. Autrement dit, tout élément de F a un **unique** antécédent par f.

La fonction f représentée ci-dessous est bijective :



Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective.

Proposition. Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. La fonction g est la **bijection réciproque** de f et se note f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

La fonction $Id_E : E \longrightarrow E$ est appelée fonction identité et définie par $x \longrightarrow x$. De même pour la fonction $Id_F ; F \longrightarrow F$.

Remarque. Dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Exemple

Soient la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ et la fonction $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x)$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

2.2 Image d'un intervalle par une fonction.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow F$ une fonction.

$$f(I) = \{y \in F, \quad \exists x \in I, \quad y = f(x)\}.$$

Proposition. • L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
• L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est aussi un intervalle fermé borné.

Remarque. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle ouvert.

Exemples

1. On considère la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a :
   $f([-1, 1]) = ...$ $\quad$ $f(]-1, +\infty[) = ...$
2. On considère la fonction cosinus définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$. On a :
   $f([\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) = ...$ $\quad$ $f([\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]) = ...$
3. On considère la fonction sinus définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$. On a :
   $f([\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]) = ...$ $\quad$ $f([\frac{-\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]) = ...$

2.3 Réciproque d'une fonction

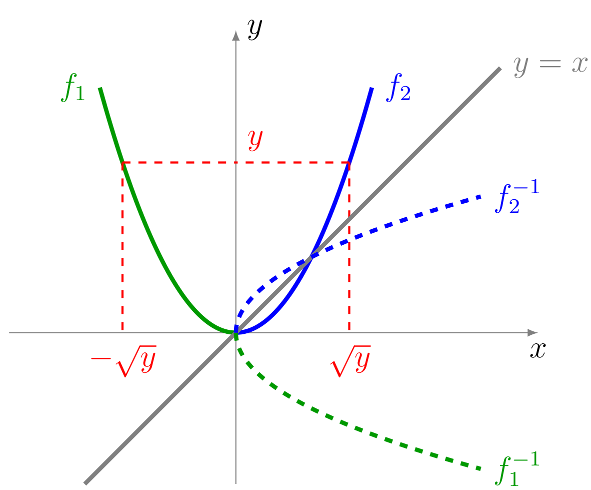
Théorème. (Théorème de la bijection)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors

1. $f : I \longrightarrow f(I)$ admet une réciproque,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone et elle a le même sens de variation que f.

Remarque. La condition $f : I \longrightarrow f(I)$ assure que f est surjective.
La stricte monotonie de f assure l'injectivité de f.
Ainsi, f est bijective de I sur $f(I)$.

Exemple

On considère la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. f est-elle bijective ?



Corollaire. Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque et qu'en plus, f est dérivable au point $a \in I$ avec $f^{'}(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a) \in f(I)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)^{'}\left(f(a)\right) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Plus généralement, si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)^{'}\left(y\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ si } f^{'}(f^{-1}(y)) \neq 0, \ \forall y \in f(I).$$

Exemple

La fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$ est bijective. Déterminer sa fonction réciproque f^{-1} et calculer sa dérivée $(f^{-1})'$.

2.4 Composition des fonctions réciproques

Définition. Soient E, F et G trois parties de $\mathbb{R}$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exemple

Soient les fonctions f et g définies par :

$$\begin{array}{rcccc} f & : &]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcccc} g & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

Déterminer la fonction $g \circ f$.

Proposition. Soient E, F et G des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des fonctions bijectives. Alors, la fonction $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

2.5 Fonctions trigonométriques réciproques

2.5.1 Fonction Arc sinus

Définition. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ dont la réciproque est appelée **Arc sinus** et notée **arcsin**.

• La fonction $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est donc une bijection strictement croissante et on a :

$$\Big(\arcsin x\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1, 1[.$$

Démonstration :

• La fonction Arc sinus est impaire puisque la fonction sinus est impaire.
• Pour $x \in [-1, 1]$, le réel $\arcsin x$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x.

$$\forall x \in [-1, 1],\ y = \arcsin x \Longleftrightarrow y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \sin y = x.$$

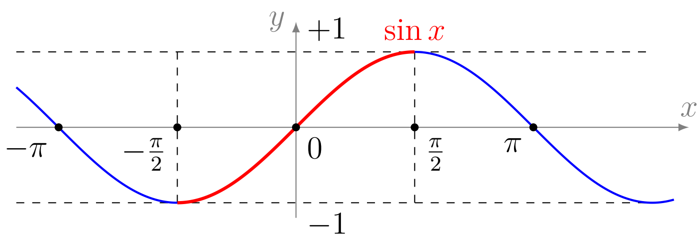
Exemple

$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = ...$ et $\arcsin(\frac{-1}{2}) = ...$

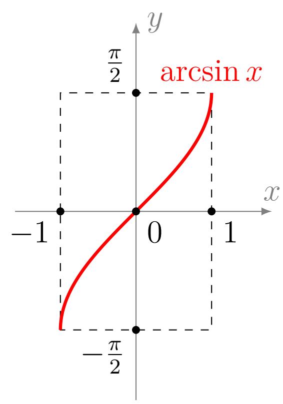
• **Relations fondamentales :**
— $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin x) = x.$
— $\forall \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin \alpha) = \alpha.$

Attention : cette dernière relation n'est pas valable (bien qu'ayant un sens) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On a ainsi par exemple $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$ et $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{6}) = \frac{-\pi}{6}$. En effet,

- La courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est présentée ci-dessous :



- Voici la courbe de la fonction Arc sinus sur l'intervalle $[-1, 1]$



2.5.2 Fonction Arc cosinus

Définition. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle définit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ dont la réciproque est appelée **Arc cosinus** et notée **arccos**.

- La fonction arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ est donc une bijection strictement décroissante et on a :

$$\Big(\arccos x\Big)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \;\; x \in]-1, 1[.$$

Démonstration :

• La fonction Arc cosinus n'est pas paire malgré que la fonction cosinus est paire.
• Pour $x \in [-1,1]$, le réel $\arccos x$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

$$\forall x \in [-1,1],\ y = \arccos x \Longleftrightarrow y \in [0,\pi],\ \cos y = x.$$

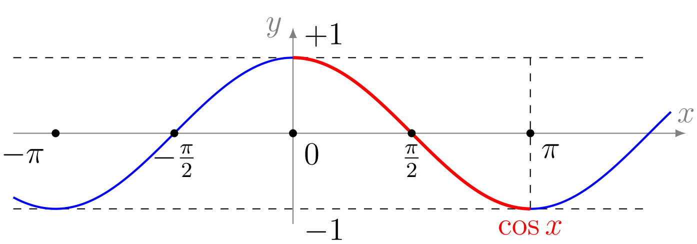
Exemple

$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = ...$ et $\arccos(\frac{-1}{2}) = ...$

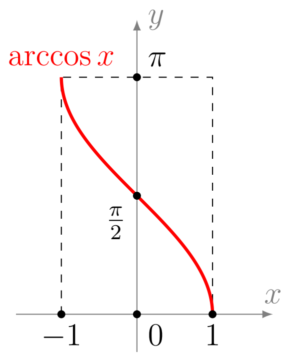
• **Relations fondamentales :**
— $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x.$
— $\forall \alpha \in [0,\pi],\ \arccos(\cos \alpha) = \alpha.$

Attention : cette dernière relation étant fausse en général pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ puisque l'on a, par exemple, $\arccos(\cos(-\dfrac{\pi}{3})) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arccos(\cos(\dfrac{4\pi}{3})) = \dfrac{2\pi}{3}$. En effet,

• La courbe de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$ est présentée ci-dessous :



- Voici la courbe de la fonction Arc cosinus sur l'intervalle $[-1, 1]$



Proposition. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration :

2.5.3 Fonction Arc tangente

Définition. La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle définit donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est appelée **Arc tangente** et notée **arctan**.

- La fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donc une bijection strictement croissante et on a :

$$\Big(\arctan x\Big)' = \frac{1}{1+x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

- La fonction Arc tangente est impaire puisque la fonction tangente est impaire.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, le réel $\arctan x$ est l'unique élément de $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y = \arctan x \Longleftrightarrow y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan y = x.$$

Exemple

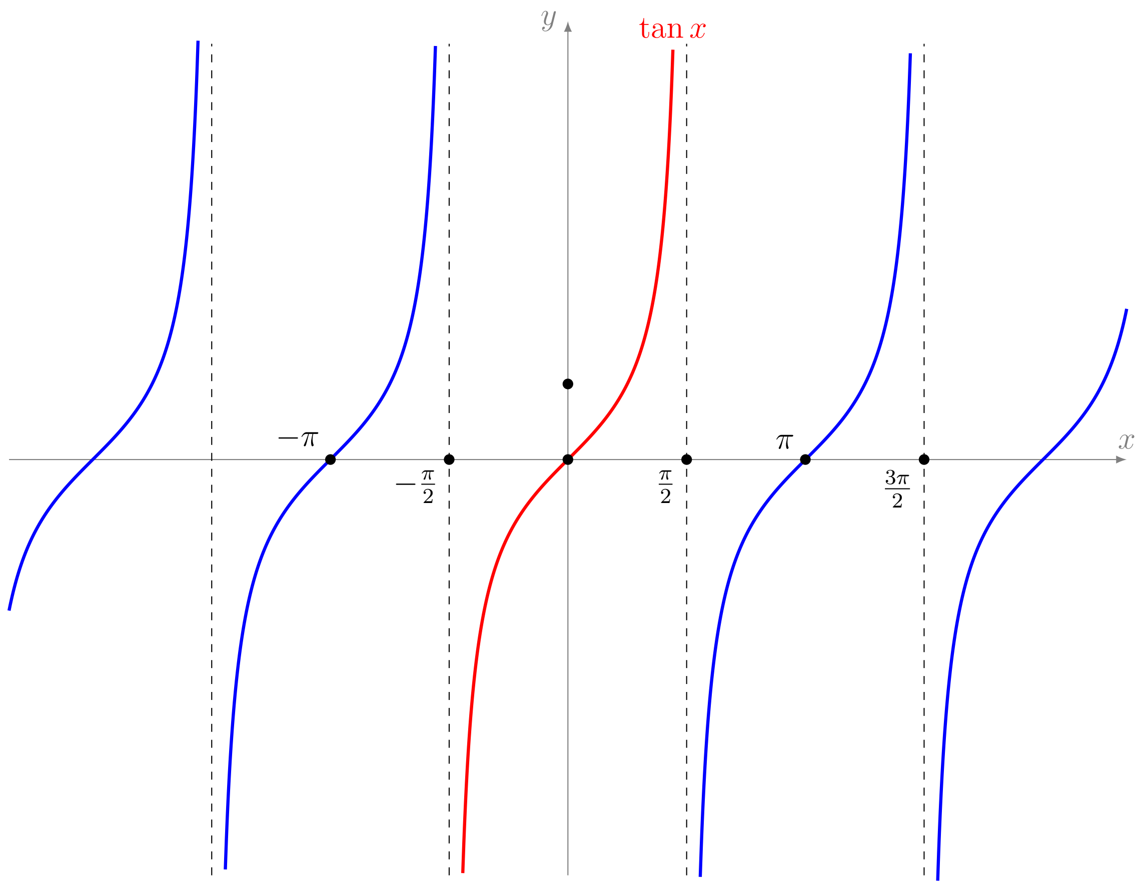
$\arctan(1) = ...$ $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = ...$ et $\arctan(-\sqrt{3}) = ...$

- **Relations fondamentales :**
  — $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$.
  — $\forall \alpha \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan \alpha) = \alpha$.

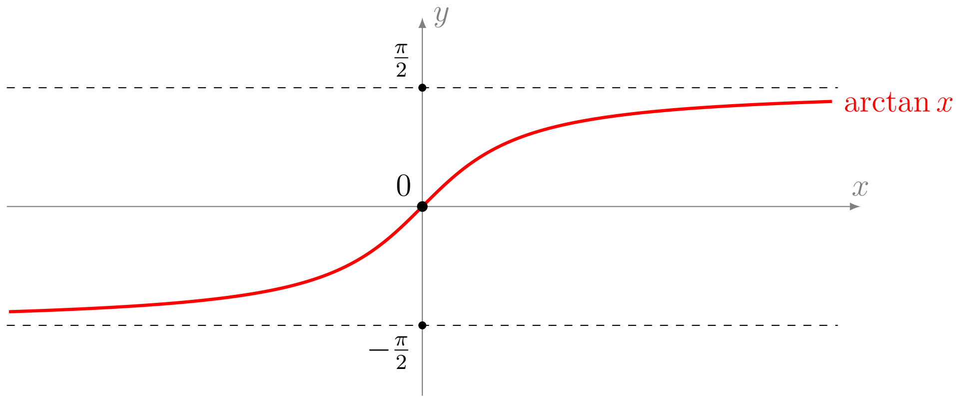
Attention : comme pour les fonctions Arc sinus et Arc cosinus, la seconde relation n'est vraie que dans l'intervalle indiqué.

Par exemple, $\arctan(\tan(\dfrac{5\pi}{6})) = \dfrac{-\pi}{6}$. En effet,

- La courbe de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ est présentée ci-dessous :



- Voici la courbe de la fonction Arc tangente sur l'intervalle $\mathbb{R}$



2.6 Fonctions hyperboliques réciproques

2.6.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition. La fonction **sinus hyperbolique**, notée sh, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

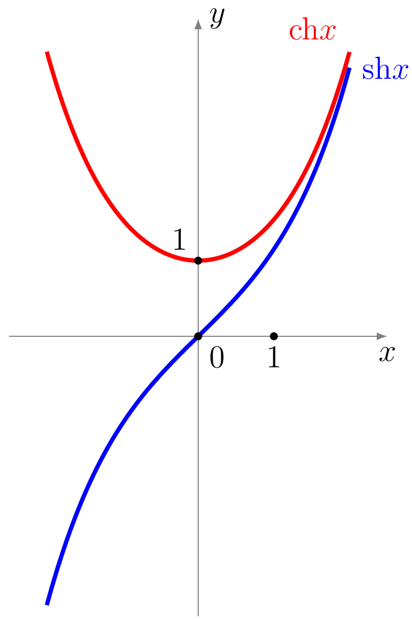
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.
- La fonction sinus hyperbolique est impaire : $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition. La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ et $\mathrm{ch}(0) = 1$.
- La fonction cosinus hyperbolique est paire : $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Les courbes des fonction sinus et cosinus hyperboliques sur $\mathbb{R}$ sont présentées ci-dessous :



• **Relations fondamentales :** Pour tout réel x, on a :

— $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$.

— $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$.

— $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$.

— $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx),\ \forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

• **Formules d'addition :** Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ on a :

— $\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.

— $\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.

— $\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.

— $\mathrm{sh}(a - b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.

• **Formules d'angle double :** Pour tout réel x, on a :

— $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x)$.

— $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$

• La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\ (x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet,

• La fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\ (x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet,

Remarque. Le nom de ces fonctions vient du fait que $x \longrightarrow (\cos x, \sin x)$ paramétrise le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ alors que $x \longrightarrow (\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)$ paramétrise l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

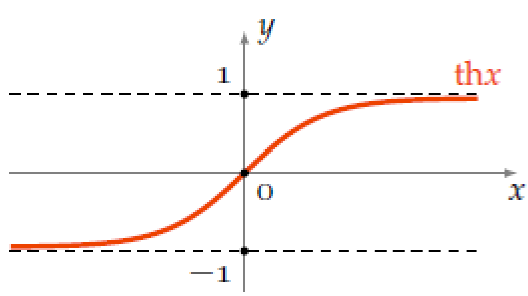
2.6.2 Fonctions tangente hyperbolique

Définition. La fonction **tangente hyperbolique**, notée th, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\mathrm{th}(0) = 0$.
• La fonction tangente hyperbolique est impaire : $\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
• $\mathrm{th}(x) \in]-1, 1[,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

• Voici la courbe de la fonction tangente hyperbolique sur l'intervalle $\mathbb{R}$



• **Formules d'addition :** Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}(a) - \mathrm{th}(b)}{1 - \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$$

.

• **Formules d'angle double :** Pour tout réel x, on a :

$$\text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$$

.

• La fonction tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\text{th}^{'}(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet,

Remarque. Les fonctions sh, ch et th sont également notées sinh, cosh et tanh respectivement.

2.6.3 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argument sinus hyperbolique

Définition. La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est appelée **argument sinus hyperbolique** et notée **argsh**.

• La fonction argsh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc une bijection strictement croissante et on a :

$$\Big(\text{argsh } x\Big)^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

• La fonction argument sinus hyperbolique est impaire puisque la fonction sinus hyperbolique est impaire.
• $\forall x \in \mathbb{R},\ y = \text{argsh } x \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R},\ \text{sh } y = x.$

Proposition. La fonction argsh peut être exprimée à l'aide d'une fonction logarithme sous cette forme :

$$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

Fonction argument cosinus hyperbolique

Définition. La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ dont la réciproque est appelée **argument cosinus hyperbolique** et notée **argch**.

• La fonction argch : $[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est donc une bijection strictement croissante et on a :

$$\Big(\text{argch } x\Big)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in]1, +\infty[.$$

Démonstration :

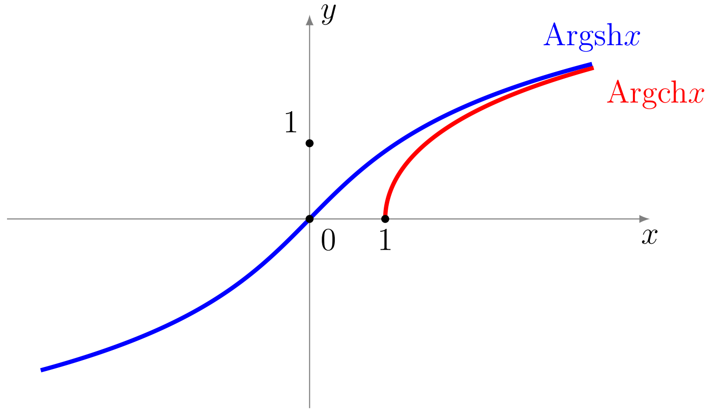
• La fonction argument cosinus hyperbolique n'est pas paire malgré que la fonction cosinus hyperbolique est paire.
• $\forall x \in [1, +\infty[,\ y = \text{argch } x \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}_+,\ \text{ch } y = x.$

Proposition. La fonction argch peut être exprimée à l'aide d'une fonction logarithme sous cette forme :

$$\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Démonstration :

• Les courbe des fonction argsh et argch sur $\mathbb{R}$ et $[1, +\infty[$ respectivement sont présentées ci-dessous :



Exemples

A) Simplifier :

— $I = \dfrac{\mathrm{ch}(\ln x) + \mathrm{sh}(\ln x)}{x}$

— $J = \mathrm{sh}^2\, x \cos^2 y + \mathrm{ch}^2\, x \sin^2 y$.

B) Résoudre l'équation ch $x = 2$.

Solutions :

Fonction argument tangente hyperbolique

> **Définition.** La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ dont la réciproque est appelée **argument tangente hyperbolique** et notée **argth**.

• La fonction argth $:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est donc une bijection strictement croissante et on a :

$$\left(\text{argth } x\right)' = \frac{1}{1-x^2},\ x \in]-1,1[.$$

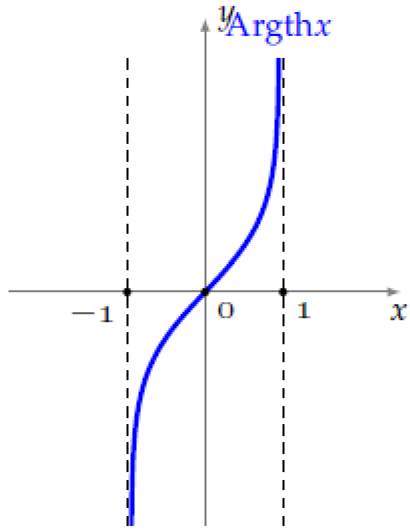
Démonstration :

• La fonction argument tangente hyperbolique est impaire puisque la fonction tangente hyperbolique est impaire.
• $\forall x \in]-1,1[,\ y = \text{argth } x \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R},\ \text{th } y = x.$

> **Proposition.** La fonction argth peut être exprimée à l'aide d'une fonction logarithme sous cette forme :
>
> $$\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in]-1,1[.$$

Démonstration :

• Voici la courbe de la fonction argth sur $]-1,1[$:



2.7 Exercices.

Exercice 2. 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Exercice 2. 2. Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.
Montrer que f est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Exercice 2. 3. Etablir que

1. $\arccos x + \arccos(-x) = \quad \pi$
2. $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$
3. $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$

Exercice 2. 4. Donner les ensembles de dérivation et calculer les dérivées de :

1. $\arctan(\sin x)$.
2. $\arcsin((1-x)^3)$.

Exercice 2. 5. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2\arccos x)$
2. $\cos(2\arcsin x)$
3. $\sin(2\arccos x)$
4. $\cos(2\arctan x)$
5. $\sin(2\arctan x)$
6. $\cos^2(\dfrac{1}{2}\arccos x)$
7. $\sin^2(\dfrac{1}{2}\arccos x)$

CHAPITRE 3

Développements limités

3.1 Développements limités au voisinage d'un point

3.1.1 Définition et existence

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité** au point a et à l'ordre n, noté $\mathbf{DL(a,n)}$, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x-a) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x-a).$$

- Le terme $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelé la **partie polynomiale ou régulière** du DL.
- Le terme $(x-a)^n \epsilon(x-a)$ est appelé le **reste** du DL.

Remarque. On dit que le reste $(x-a)^n \epsilon(x-a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ et on écrit parfois à la place $o\Big((x-a)^n\Big)$.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Proposition. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point a alors f admet un DL au point a à l'ordre n et qui est donné par :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big)$$

où $o\Big((x-a)^n\Big)$ est une fonction telle que $\lim_{x \to a} o((x-a)^n) = 0$.

Remarque. Si f admet un DL en un point a à l'ordre n alors elle en possède un pour tout $k \leq n$.
Si f admet un DL alors ce DL est **unique**.

Exemples

1. Calculer le $DL(0,4)$ de $\exp x$.

2. Calculer le $DL(0,4)$ de $\cos x$.

3. Calculer le $DL(0,4)$ de $\sin x$.

Corollaire. Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son DL en 0 commence par :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

3.1.2 DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants sont à apprendre par coeur !

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Remarque. La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0.
Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$.

Exemples

1. Calculer le $DL(1, n)$ de $f(x) = \exp x$.

2. Calculer le $DL(\pi/2, 4)$ de $g(x) = \sin x$.

3. Calculer le $DL(1, 3)$ de $\ell(x) = \ln(1 + 3x)$.

3.2 Opérations sur les développements limités

3.2.1 Somme et produit

Proposition. Soient f et g sont deux fonctions qui admettent des $DL(0,n)$:

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n) \qquad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + o(x^n).$$

- $f+g$ admet un $DL(0,n)$ qui s'écrit :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_n + d_n)x^n + o(x^n).$$

- $f \times g$ admet un $DL(0,n)$ qui s'écrit :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + o(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le polynôme obtenu en développant le produit

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)$$

et en ne gardant que les monômes de degré $\leq n$.
On appelle cette opération une **troncature** des ordres $> n$ et on écrit

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)\big|_{tronc(n)}.$$

Remarque. Le petit o agit comme un aspirateur des termes d'ordre supérieur au sien.
Exemple : $f(x) = 2 + x - \dfrac{x^2}{2} + x^4 - x^5 + o(x^3) = 2 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Règles de calcul

— $o\Big((x-a)^n\Big) \pm o\Big((x-a)^n\Big) = o\Big((x-a)^n\Big)$

— $\lambda\, o\Big((x-a)^n\Big) = o\Big((x-a)^n\Big),\ \lambda \in \mathbb{R}$

— $o\Big((x-a)^n\Big) + o\Big((x-a)^m\Big) = o\Big((x-a)^{\min\ (n,m)}\Big),\ n, m \in \mathbb{N}$

Exemple 1

Calculer le $DL(0,2)$ de $\cos x + \sqrt{1+x}$.

Exemple 2

Calculer le $DL(0,2)$ de $\cos x \times \sqrt{1+x}$.

Comme on le voit dans cet exemple, on a omis d'écrire les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 car $o(x^2) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 o(x^2) = o(x^2)$.
Mais il faut bien comprendre que les différents $o(x^2)$ écrits ne correspondent pas à la même fonction, ce qui justifie que cette égalité ne soit pas fausse !

3.2.2 Composition

Soient les $DL(0,n)$ de f et g donnés par :

$$f(x) = C_n(x) + x^n \epsilon_1(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$g(x) = D_n(x) + x^n \epsilon_2(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n)$$

Proposition. Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C_n(D_n(x))$:

$$f \circ g(x) = C_n(D_n(x))|_{tronc(n)} + o(x^n).$$

Remarque. Quand on fait un changement de variable $u = g(x)$, attention

- à vérifier que u tend vers 0 si x tend vers 0 afin de pouvoir utiliser les DL des fonctions usuelles au voisinage de 0.
- à bien exprimer $o(u)$ en fonction de $o(x)$.

Exemples :

- Si $u = x + ...$ alors $u \to 0$ et $o(u) = o(x)$ (même ordre).
- Si $u = x^2 + ...$ alors $u \to 0$ et $o(u) = o(x^2)$. Donc, un DL en x à l'ordre 4 équivaut à un DL en u à l'ordre 2 : $o(u^2) = o(x^4)$.

Exemple

Calculer le $DL(0,3)$ de $h(x) = \sin\Big(\ln(1+x)\Big)$.

Remarque. Si $g(0) \neq 0$ alors on a intérêt à écrire $f(g(x)) = f\Big(g(x)-g(0)+g(0)\Big)$ et d'introduire une nouvelle fonction $v(x) = g(x) - g(0)$. Ainsi, $v(0) = 0$.

Exemple

Calculer le $DL(0,4)$ de $h(x) = \sqrt{\cos x}$

3.2.3 Division

On s'intéresse au calcul du DL en 0 d'un quotient $\frac{f}{g}$. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n).$$

Pour calculer le DL de $\frac{f}{g}$, nous allons utiliser le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n)$. Le quotient s'écrit alors $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en factorisant par d_0 :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + \cdots + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{o(x^n)}{d_0}}.$$

3. Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 1

Calculer le $DL(0,4)$ de $\tan x$.

Exemple 2

Calculer le $DL(0,3)$ de $\dfrac{1+x}{2+x}$.

Remarque. Autre méthode.

Soit $f(x) = C_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = D_n(x) + o(x^n)$.

Pour calculer le DL en 0 de $\dfrac{f}{g}$, on peut écrire la division suivant les puissances croissantes de C_n par D_n à l'ordre n :

$$C_n = D_n Q_n + x^{n+1}R, \text{ avec } \deg \mathrm{Q_n} \leq \mathrm{n}.$$

Alors Q_n est la partie polynomiale du DL en 0 à l'ordre n de $\dfrac{f}{g}$.

Exemple

On calcule le $DL(0,2)$ de $h(x) = \dfrac{2+x+2x^3}{1+x^2}$.

3.2.4 Intégration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dont le DL en $a \in I$ à l'ordre n est

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big).$$

Théorème. Notons F une primitive de f. Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o\Big((x-a)^{n+1}\Big).$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Exemple

Calcul du DL de $\arctan x$.

On sait que $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $F(x) = \arctan x$, on écrit

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Et comme $\arctan(0) = 0$ alors

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Remarque. Il est intérdit de dériver un DL car dans $o(x^n) = x^n\epsilon(x)$, la fonction ϵ n'est pas dérivable.

3.3 Applications des développements limités

Voici les applications les plus remarquables des développements limités.

3.3.1 Calcul de limites

Les DL constituent un outil très puissant pour calculer des limites et surtout lever l'indétermination de type $\dfrac{0}{0}$. Pour celà, il faudra savoir à quel ordre faire le DL.
De façon générale, on calcule les DL à l'ordre le plus bas possible et si cela ne suffit pas, on augmente progressivement l'ordre.
Exemple : Si $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, on regarde le premier terme du DL du dénominateur en 0.
Si $g(x) = ax^p + ... + o(x^n)$, $a \neq 0$ alors il faut faire le DL de f au moins à l'ordre p.

Exemple

1. Calculer la limite en 0 de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

2. Calculer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$.

Remarque. On peut utiliser le DL d'une fonction f au point a pour trouver un équivalent de f au voisinage de a. Il suffit de prendre le premier terme du DL de f et remplacer la limite de f par la limite de son équivalent au voisinage de a.

On rappelle la définition et quelques propriétés des équivalents.

Définition. Deux fonctions f et g sont équivalentes en un point a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f(x) \sim_a g(x)$.

Propriétés. L'équivalent d'un produit (respectivement d'un quotient) est le produit (respectivement le quotient) des équivalents.

Attention :

— Il est incorrect d'écrire qu'une fonction est équivalente à 0.

— On n'additionne pas membre à membre les équivalents.

Exemple

Recalculer la limite en 0 de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Remarque. Une fonction polynôme est équivalente en 0 (respectivement à l'infini) au terme de plus petit degré (respectivement au terme de plus haut degré).

Exemple

$f(x) = \dfrac{x}{2} - x^2 + \dfrac{x^4}{3}$. Déterminer une fonction équivalente à f en 0 et en $+\infty$

3.3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, C_f sa courbe représentative. On cherche l'équation de la tangente à f au point $(a, f(a))$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
On écrit le $DL(a,2)$ de f :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{'}(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f^{''}(a) + (x-a)^2\epsilon(x-a).$$

Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y = f(a) + (x-a)f^{'}(a).$$

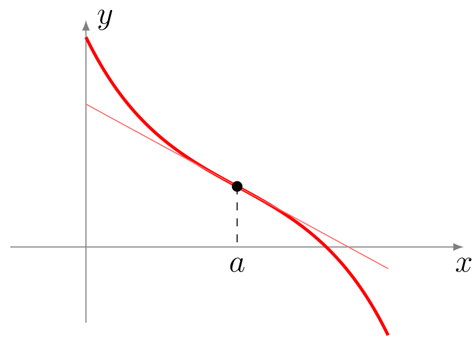
Pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a, on étudie le signe de $f(x) - y$.

— Cas 1 : $f^{''}(a) \neq 0$
  D'après le DL, le signe de $f(x) - y$ est donné par le signe de $f^{''}(a)$ (on néglige le petit terme $\epsilon(x-a)$).
  Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
  Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.

— Cas 2 : $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$
On écrit le $DL(a, 3)$ de f. Alors, le signe de $f(x) - y$ est donné par le signe de $(x-a)^3 f^{(3)}(a)$.
Supposons que $f^{(3)}(a) \geq 0$, donc

$$f(x) - y \geq 0 \text{ si } x \geq a, \quad f(x) - y \leq 0 \text{ si } \; x \leq a.$$

Le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion.
Si $f^3(a) \leq 0$ alors on obtient la conclusion contraire.



Exemple

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ à la courbe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.

3.3.3 Branches infinies et position

Développements asymptotiques

Définition. On appelle **développement asymptotique** un DL qui ne fait pas intervenir que des puissances entières de x.
C'est un DL de f au voisinage de $\pm\infty$. Il suffit de faire un changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener à un voisinage de zéro.
Cela nous permet d'avoir une idée assez précise du comportement de f au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple

$DL(+\infty, 3)$ de $f(x) = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

Branches infinies et position

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une branche infinie (par exemple une asymptote) $b(x)$.
On peut avoir des branches infinies différentes en $+\infty$ et en $-\infty$.
Pour trouver $b(x)$ et étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $b(x)$, on utilise les DL asymptotiques.

Technique :

1. On met en facteur les termes dominants qui tendent vers l'infini.

$$f(x) = x^p g\left(\frac{1}{x}\right),\ p \in \mathbb{N},\ g \text{ une fonction.}$$

2. On pose $z = \frac{1}{x}$ et on fait le $DL(0, n)$ de $g(z)$. (**n sera précisé plus tard**).

$$g(z) = g(0) + zg^{'}(0) + ... + z^n \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + o(z^n).$$

3. On réécrit en x :

$$g(\frac{1}{x}) = g(0) + \frac{1}{x}g^{'}(0) + ... + \frac{1}{x^n}\frac{g^{(n)}(0)}{n!} + o(\frac{1}{x^n})$$

Donc,

$$f(x) = x^p g\left(\frac{1}{x}\right) = x^p g(0) + x^{p-1}g^{'}(0) + ... + x\frac{g^{(p-1)}(0)}{(p-1)!} + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}$$
$$+\frac{1}{x}\frac{g^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + ... + \frac{1}{x^{n-p}}\frac{g^{n}(0)}{n!} + o(\frac{1}{x^{n-p}}).$$

La branche infinie recherchée est :

$$b(x) = x^p g(0) + x^{p-1} g^{'}(0) + ... + x \frac{g^{(p-1)}(0)}{(p-1)!} + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}.$$

4. Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à la branche infinie, on a juste besoin du signe du terme $\frac{1}{x}\frac{g^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$ si $g^{p+1}(0) \neq 0$ sinon on fait le DL à l'ordre $p+2$.

   Conclusion : À faire le DL à l'ordre $p+1$ (au moins), donc $n = p+1$.

Exemple

On cherche les asymptotes de $f(x) = \exp \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.

1. En $+\infty$.

2. En $-\infty$.

3.4 Exercices.

Exercice 7. 1. Déterminer les $DL(0,n)$ des fonctions suivantes et donner un équivalent simple de chacune d'elles au voisinage de 0.

1. $f_1(x) = \cos(x).e^x$, $n = 3$
2. $f_2(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 3$
3. $f_3(x) = \sqrt{1 + \tan(x)}$, $n = 3$
4. $f_4(x) = (\cos x)^{\sin x}$, $n = 4$
5. $f_5(x) = \ln(\cos(x))$, $n = 6$
6. $f_6(x) = \arctan\left(\dfrac{1)}{1 - x}\right)$, $n = 3$

Exercice 7. 2. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^3}$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$

Exercice 7. 3. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x)$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Donner le $DL(1,3)$ de f.
2. En déduire l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (1, \frac{1}{2})$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 7. 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Trouver l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (2, f(2))$ et déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 7. 5. Déterminer les asymptotes éventuelles et la position de la courbe représentative par rapport à celles ci, des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}}$
2. $f_2(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

CHAPITRE 4

Nombres complexes

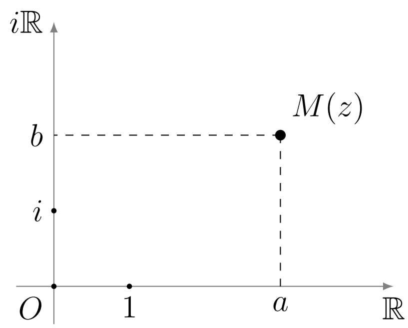
4.1 Les nombres complexes

4.1.1 Définitions

Définition. Un **nombre complexe** est un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $z = a + ib$ avec $i^2 = -1$.
a est la **partie réelle** de z notée $Re(z)$ et b la **partie imaginaire** de z notée $Im(z)$.

Remarque. $z = a + ib$ est la forme cartésienne (ou algébrique) d'un nombre complexe.

Représentation géométrique :
On représente le nombre complexe z par le point $M = M(z)$ d'abscisse $Re(z)$ et d'ordonnée $Im(z)$.



• Cela revient à identifier 1 avec le vecteur $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ et i avec le vecteur $(0, 1)$.
• On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
• Si $b = 0$, alors $z = a$ est situé sur l'axe des abscisses, que l'on identifie à $\mathbb{R}$. Dans ce cas on dira que z est **réel** et $\mathbb{R}$ apparaît comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, appelé axe réel.
• Si $b \neq 0$ et $a = 0$, alors $z = ib$ est situé sur l'axe des ordonnées, que l'on identifie à $i\mathbb{R}$. Dans ce cas, on dira que z est **imaginaire pur**.
• Si $b \neq 0$, z est dit **imaginaire**.

Exemples

$z = 1 + 3i$ est imaginaire, $z = 2$ est réel et $z = -i$ est imaginaire pur.

Proposition. Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $z = z' \iff \{Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')\}$
2. En particulier, $z = 0 \iff \{Re(z) = 0 \text{ et } Im(z) = 0\}$

4.1.2 Calculs sur les nombres complexes

Définition. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

1. La somme de deux nombres complexes z et z' est définie par

$$z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

2. Le produit de deux nombres complexes z et z' est définie par
$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$
Par exemple, $(1-2i)(2-3i) = (2-6) + i(-3-4) = -4-7i$
3. L'opposé de $z = a + ib$ est $-z = -a - ib$.
4. La multiplication de z par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot z = (\lambda a) + i(\lambda b)$.
5. Si $z \neq 0$, l'inverse de z est $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}(a - ib)$.

   Par exemple, pour $z = 1-3i$, $z^{-1} = ...$
   Remarque : $zz^{-1} = 1$.
6. La division de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.
7. Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
8. Puissance : $z^n = z \times ...z$ n fois avec $n \in \mathbb{N}$.

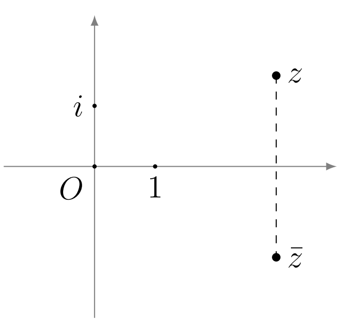
   Par convention, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$ et $z^0 = 1$.

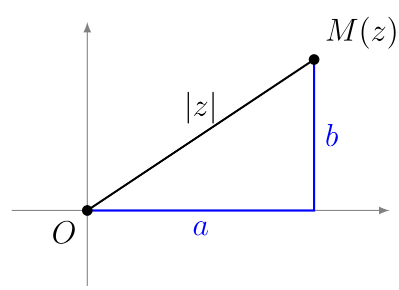
Remarque. Il n'y pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$, il ne faut donc jamais écrire $z \geqslant 0$ ou $z \leqslant z'$.

4.1.3 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
Le **conjugué** de z est $\bar{z} = a - ib$, autrement dit $Re(\bar{z}) = Re(z)$ et $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.
Le point $\bar{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe réel.
Le **module** de z est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Comme $z \times \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ alors $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Remarque. Si $M = M(z)$ alors le module de z est la distance entre O et M.





Exemple

Soit $z = 2 - 3i$. Alors $\bar{z} = 2 + 3i$ et $|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4.1.4 Quelques formules

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
2. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$. En effet,

3. $|z|^2 = z \times \overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$, $|zz'| = |z||z'|$
4. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

Remarque. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$. Ceci est un résultat du fait que $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ et $|b| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.
2. si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ est à la fois le module et la valeur absolue de z.
3. $z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$. En effet,

Proposition. **(L'inégalité triangulaire)**

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Exercice

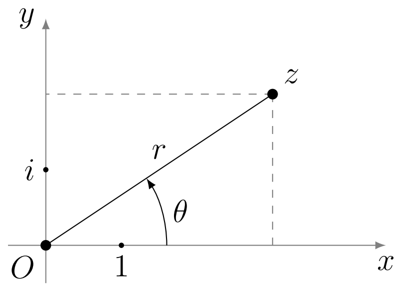
1. Mettre sous la forme cartésienne le nombre complexe suivant : $\dfrac{3+6i}{3-4i}$.
2. Même question pour : $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, $(1+i)^4$, $(1+i)^8$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$
4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$.

4.1.5 Arguments d'un complexe non nul, forme trigonométrique

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe de module 1, alors $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$. Donc, le point $M(z)$ se trouve sur le cercle unité du plan. Son abscisse a est notée $\cos\theta$ et son ordonnée b est $\sin\theta$, où θ est l'angle entre (Ox) et $\vec{OM}$.
Plus généralement, si $z \neq 0$, $z/|z|$ est de module 1 et on a la définition suivante :

Définition. Soit z un complexe non nul. Tout réel θ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelé un **argument** de z et noté $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ (on dit que θ et $\arg(z)$ sont congruents modulo 2π). On définit **l'écriture trigonométrique** de z par :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{où } r = |z|.$$



Remarque. 1. L'argument de z est défini modulo 2π :

$$\theta \equiv \theta' \ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{array} \right.$$

2. Si $z = a + ib$ alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{array} \right.$$

3. L'argument est unique si on rajoute la condition $\theta \in [-\pi, \pi[$ ou $\theta \in [0, 2\pi[$.

Propriétés. Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$
3. si $z \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$
4. si $z' \neq 0$, $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
5. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \quad [2\pi], \quad n \in \mathbb{Z}$ (avec z non nul)

Démonstration :

4.1.6 Notation exponentielle des nombres complexes

• Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

C'est la forme exponentielle d'un nombre complexe de module 1.
• Tout nombre complexe z s'écrit donc

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

où $r = \mid z \mid$ est le module de z et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ est un argument de z.
On dit alors que z est écrit sous **forme exponentielle ou polaire.**

Remarque. Le complexe $e^{i(-\theta)}$ est aussi noté $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

Avec cette notation, on obtient immédiatement les formules d'Euler.

Proposition. (Formules d'Euler)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration :

Proposition. Produit et quotient de deux complexes sous forme exponentielle
Soient z et z' deux complexes non nuls de forme exponentielles :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad z' = r'e^{i\theta'}.$$

On a les résultats suivants :

1. $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
2. $z^n = r^n e^{in\theta}$ avec $n \in \mathbb{N}$
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
4. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\ e^{i(\theta-\theta')}$
5. $\overline{z} = re^{-i\theta}$

Exemples

Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3$, $z_4 = \dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$ et $z_5 = 1 + e^{ia}$, $a \in [0, 2\pi[$.

Définition. (Exponentielle complexe)
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
On appelle **exponentielle de z** le nombre complexe e^z défini par :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i\ e^x \sin y.$$

Le module du nombre complexe e^z est $e^{Re(z)}$ et l'un de ses arguments est $Im(z)$.
En particulier, on a $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

Proposition. Soient z et $z^{'} \in \mathbb{C}$.

1. $z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \quad [2\pi]$. En effet,

2. $e^z = e^{z'} \iff Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) \equiv Im(z') \quad [2\pi]$. En effet,

3. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

4. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. En effet,

5. $(e^z)^{-1} = e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

En utilisant la propriété suivante : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}$, on déduit la formule de Moivre.

Proposition. (Formule de Moivre)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

La formule de Moivre implique alors :

$$\begin{cases} \cos n\theta = Re(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ \sin n\theta = Im(\cos\theta + i\sin\theta)^n \end{cases}$$

Exemples : Applications à la trigonométrie

1. Développement : Calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Linéarisation : Calculer $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$ en fonction de $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$.
   Solutions :

4.2 Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.2.1 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Racine carrée d'un complexe

Définition. On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe a, tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Proposition. Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Démonstration :

Exemples

1. Les deux racines carrées d'un réel strictement positif a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
2. Les deux racines carrées d'un réel strictement négatif a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
3. Le complexe 0 n'a que lui-même comme racine carrée.
4. Les racines carrées de -1 sont i et $-i$.

Attention : Ne jamais écrire $\sqrt{z}$ si $z \in \mathbb{C}$.

Méthode algébrique

Soient $a = X + iY$ et $z = x + iy$. On cherche les réels x, y tels que $z^2 = a$. On a donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} Re(z^2) = Re(a) \\ Im(z^2) = Im(a) \\ \mid z^2 \mid = \mid a \mid \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ 2xy = Y \end{cases}$$

• Les deux premières équations permettent de déterminer x^2 et y^2.
• On obtient donc quatre couples (x, y) possibles.
• On extrait ensuite les deux couples solutions en utilisant que xy et Y ont même signe d'après la troisième équation du système.

Exemple

1. Calculer les racines carrées de i et en déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$.
2. Calculer les racines carrées de $3 - 4i$.

Solution :

Résolution d'une équation du second degré

Proposition. Etant donnés trois **complexes** a, b, c avec $a \neq 0$, considérons l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (E)$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$ et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ, alors l'équation (E) admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une racine double $z = \dfrac{-b}{2a}$.

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + \dfrac{1-i}{4} = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + (i - \sqrt{2})z^2 - i\sqrt{2} = 0$

On retrouve aussi le résultat bien connu pour les équations à coefficients réels :

Corollaire. Si les coefficients a, b, c sont **réels** alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation (E) sont de trois types :
- si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double réelle qui vaut $-\dfrac{b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet <u>deux racines complexes distinctes conjuguées</u> $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z - 1 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + 1 = 0$.

4.2.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit n un entier naturel non nul.

Définition. Soit a un complexe.
• On appelle **racine n-ième** de a tout complexe z tel que $z^n = a$.
• On appelle **racines n-ièmes de l'unité**, les racines n-ièmes de 1 c.à.d tout complexe z tel que $z^n = 1$.

Racines n-ièmes de l'unité

Proposition. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Démonstration :

Remarque. Si z est une racine n-ième de l'unité alors $\overline{z}$ est aussi une racine n-ième de l'unité.
Les racines n-ièmes de l'unité sont conjuguées deux à deux.

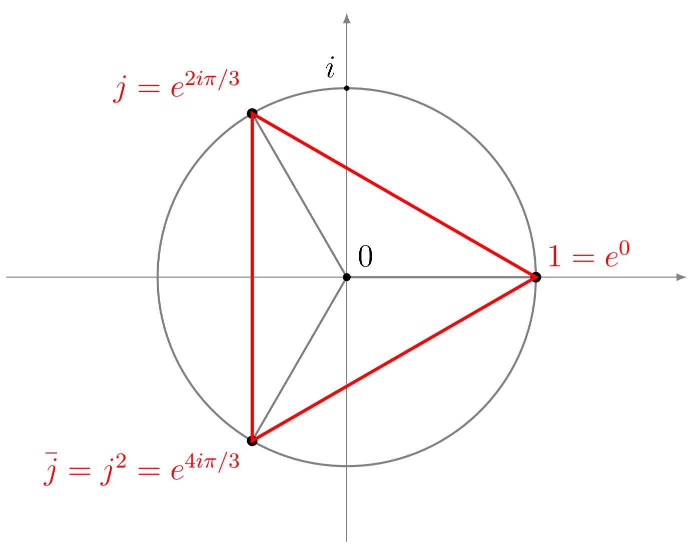
Proposition. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration :

Exemple 1

Déterminer les racines 3-ièmes de l'unité.

On a $1+j+j^2=0$ et les images des trois racines 3-ièmes de l'unité sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.



Racines 3-ièmes de l'unité ($z^3 = 1$)

Exemple 2

Déterminer les racines 4-ièmes de l'unité.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Proposition. Soient $n \neq 0$ un entier naturel et $a \neq 0$ un nombre complexe de module r et d'argument θ ($a = re^{i\theta}$).
Les n racines n-ièmes de a sont les complexes :

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\ , \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Démonstration :

Exemple 2

1. Déterminer les racines 5-ièmes de $-i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

Solutions :

4.3 Exercices.

Exercice 4. 1. Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

1. $1+i\sqrt{3}$
2. $1-i$
3. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $(1+e^{ia})^n$, $a \in [0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $1+\cos\phi - i\sin\phi$

Exercice 4. 2. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$-3+4i \text{ et } \frac{1+i}{1-i}$$

Exercice 4. 3. Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.
En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4. 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-(2+i)z+7+i=0$
2. $z^4-2iz^2-5=0$
3. $z^2-2\cos\theta z+1=0$
4. $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

Exercice 4. 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \frac{1-i\tan a}{1+i\tan a}.$$

Exercice 4. 6. Linéariser, $\cos^4 x$ et $\sin^2 x\cos^3 x$.

Exercice 4. 7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer :

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n}\cos(k\theta), V_n = \sum_{k=0}^{k=n}\sin(k\theta)$$

CHAPITRE 5

Polynômes

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Définitions et règles de calcul

5.1.1 Définitions

Définition. Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Les a_i sont appelés les **coefficients** du polynôme.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le **polynôme nul**, il est noté 0.
- On appelle le **degré** de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $\deg P$ ou $\deg(P)$. Pour le degré du polynôme nul, on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un **polynôme constant**. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.

Exemples

- $X^3 - 5X + \frac{3}{4}$ est un polynôme de degré 3. Les coefficients de ce polynôme sont 1, 0, -5 et $\frac{3}{4}$.
- $X^n + 1$ est un polynôme de degré n.
- 2 est un polynôme constant de degré 0.

5.1.2 Opérations sur les polynômes

Proposition. Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On dit que P et Q sont égaux si et seulement si $\forall i,\ a_i = b_i$.

Proposition. Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + ... + b_1 X + b_0$. On définit la somme de ces deux polynômes par :

$$P + Q = (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + ... + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

Proposition. Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + ... + b_1 X + b_0$. On définit le produit de ces deux polynômes par :

$$P.Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + ... + c_1 X + c_0$$

avec $r = n + m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour $k \in \{0, ...r\}$.

Exemple

Soient $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.
- $P = Q$ si et seulement si ...
- $P + Q = ...$
- $P.Q = ...$

Proposition. Pour $P,\ Q,\ R \in \mathbb{K}[X]$, on a :
- $0 + P = P$, $P + Q = Q + P$, $(P + Q) + R = P + (Q + R)$;
- $1 \times P = P$, $P \times Q = Q \times$P, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$;
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

Proposition. Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$, avec P et Q non nuls.
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- si $\deg P \neq \deg Q \Rightarrow \deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Exemples

- Soient $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X - 1$. Déterminer $\deg(P \times Q)$.
- Soient $P(X) = 2X^2 + X - 1$ et $Q(X) = -2X^2 + X - 2$. Déterminer $\deg(P + Q)$.
- Soient $P(X) = 2X^2 + X - 1$ et $Q(X) = 4X^3 + X^2 + 2X + 2$. Déterminer $\deg(P + Q)$.

5.1.3 Vocabulaire

Définition. Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, un polynôme.
- Si $a_n \neq 0$ alors a_nX^n est appelé le **terme dominant** de P et a_n est appelé le **coefficient dominant** de ce polynôme.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

Remarque. 1. Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k) sont appelés **monômes**.
2. Tout polynôme est une somme finie de mônomes.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ \deg(P) \leq n\}$$

.

Exemple

Soit $P(X) = (X-1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. Déterminer le degré de P. Ce polynôme est-il unitaire ?

5.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

5.2.1 Multiples, diviseurs

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que B **divise** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$ c.à.d $\dfrac{A}{B} = Q$.
On note alors $B|A$.
On dit aussi que A est **multiple** de B ou que A est divisible par B.

Remarque.
1. Si $B|A$ alors $\deg B \leq \deg A$.
2. $A|A$, $1|A$ et $A|0$. En effet,

Proposition. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.
1. Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.
2. Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.
3. Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|(A+B)$.

Démonstration :

5.2.2 Division Euclidienne

Théorème. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le **quotient** et R le **reste** et cette écriture est la **division euclidienne** (suivant les puissance décroissantes) de A par B.

Remarque. Si $B|A$ alors $R = 0$.

Exemples

1. Soient $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2$ et $B = X^2 - X + 1$. Effectuer la division euclidienne de A par B.

2. Même question pour $A = X^4 - 3X^3 + X + 1$ et $B = X^2 + 2$.

3. Même question pour $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$.

5.2.3 Plus grand diviseur commun : pgcd

Proposition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.
Il existe un unique polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois A et B.
Ce polynôme est appelé le **plus grand commun diviseur** de A et B et est noté $PGCD(A, B)$.

Remarque.

1. Le $PGCD(A, B)$ est un **polynôme unitaire**.
2. Pour tout $\lambda \in K^*$, $PGCD(\lambda A, B) = PGCD(A, B)$.

Proposition. Si R est le reste de la division euclidienne de A par B alors $PGCD(A, B) = PGCD(B, R)$. C'est ce qui justifie l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide

Soient A et B des polynômes non nuls.
On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{lll} A & = BQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg B \\ B & = R_1Q_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg R_1 \\ R_1 & = R_2Q_3 + R_3 & \deg R_3 < \deg R_2 \\ \vdots & & \\ R_{k-2} & = R_{k-1}Q_k + R_k & \deg R_k < \deg R_{k-1} \\ R_{k-1} & = R_kQ_{k+1} & \end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division.
On arrête l'algorithme **lorsque le reste est nul**.
Le pgcd est le **dernier reste non nul R_k normalisé (rendu unitaire)**.

Exemple 1

Déterminer le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

Exemple 2

Même question pour $A = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont **premiers entre eux** si $PGCD(A, B) = 1$.

Exemple

Montrer que $A = X^2 + X + 1$ et $B = X - 1$ sont premiers entre eux.

Théorème. **[Théorème de Bézout]**
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls. On note $D = PGCD(A, B)$.
Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

Ce théorème découle de l'algorithme d'Euclide et plus spécialement de sa **remontée en partant de l'avant dernière ligne** comme on le voit sur l'exemple suivant.

Exemples

1. Soient $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$. Déterminer $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = PGCD(A, B)$.

2. Même question pour $A = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.

Théorème. Soient A et B deux polynômes.
A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

5.3 Racine d'un polynôme et factorisation

5.3.1 Racines d'un polynôme

Définition. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
On associe ainsi au polynôme P une **fonction polynôme** (que l'on note encore P)

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition.

$$P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \text{ divise } P$$

Démonstration :

Exemple

Soit $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Vérifier que $X - 1$ divise P

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une **racine de multiplicité** k **ou d'ordre** k de P si $(X - \alpha)^k$ divise P alors que $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.
Lorsque $k = 1$ on parle d'une **racine simple**, lorsque $k = 2$ d'une **racine double**, etc.

Exemple

Soit $P(X) = X^3 - 3X + 2$. Montrer que 1 est une racine de multiplicité k (à déterminer) de P.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) α est une racine de multiplicité k de P.
(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple

Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Montrer que 1 est une racine de multiplicité k (à déterminer) de P.

Théorème. **[Théorème de d'Alembert-Gauss]**
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ a **au moins une racine** dans $\mathbb{C}$.
Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Exemple

Soit $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. Monter que P admet exactement 3 racines complexes.

5.3.2 Polynômes irréductibles

Définition. Un polynôme **irréductible** P est un polynôme non constant (de degré ≥ 1) dont les seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme aP où $a \in \mathbb{K}^\star$.

Remarque. Dans le cas contraire, on dit que P est **réductible** s'il existe des polynômes A, B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geq 1$ et $\deg B \geq 1$.

Exemples

1. Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par exemple $X - 1$ et $2X - 3$.
2. $X^2 - 1$ est ...
3. $X^2 + 1$ est ...
4. $X^2 - 2$ est ...

5.3.3 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème. Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes **irréductibles unitaires** :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à permutations près des facteurs.

Exemple

Soit $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$. Écrire P sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles unitaires (ou factoriser P).

Proposition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de **degré** 2 **ou** 3.
P est irréductible si et seulement si P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple

Soit $P(X) = X^2 + 1$. P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarque. Attention, cette proposition est vraie juste pour les polynômes de degré 2 et 3 comme le montre le contre-exemple $P(X) = (X^2 + 2)^2$.
En effet, P n'a pas de racines réelles mais P est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ car $X^2 + 2$ divise P.

Théorème. • Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de **degré** 1.
La factorisation s'écrit donc sous cette forme : $P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2}...(X - \alpha_r)^{k_r}$, où $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ sont leurs multiplicités.

• Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de **degré** 1 ainsi que les polynômes de **degré** 2 **ayant un discriminant** $\Delta < 0$.
La factorisation s'écrit donc sous cette forme : $P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1}...(X - \alpha_r)^{k_r} Q_1^{l_1}...Q_s^{l_s}$ où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

5.4 Exercices

Exercice 5. 1. Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ par $B = X^2 + 2X + 3$.

Exercice 5. 2. Déterminer le PGCD Δ des polynômes $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + 1$ et trouver dans chaque cas deux polynômes U et V tels que $AU + BV = \Delta$.

Exercice 5. 3. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$.

1. Déterminer le PGCD de P et P'.
2. En déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles.

Exercice 5. 4. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^4 - 5X^2 + 4$
2. $P = (X^4 - 1)(X - 1)^2$
3. $P = X^4 + 4$
4. $P = X^8 - 1$

Exercice 5. 5. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$$

sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 5. 6. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

CHAPITRE 6

Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Introduction et définitions

Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.
• La division euclidenne de A par B nous permet d'écrire :

$$A = BE + R, \quad \text{où } \deg(R) < \deg(B).$$

Autrement dit,

$$\frac{A}{B} = E + \frac{R}{B}$$

• E est appelée partie entière ou régulière de la décomposition.

Définition. Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PGCD(A, B) = 1$.
• On appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ le quotient de A par B et on note $\frac{A}{B}$.
• Si $\deg(A) < \deg(B)$ alors la partie entière E est nulle.
• L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Définition. Soient $F = \frac{A}{B}$, $PGCD(A, B) = 1$.
• On appelle **zéro** de F les racines de A.
• On appelle **pôle** de F les racines de B.
• L'ordre d'un zéro ou d'un pôle est l'ordre de cette racine.

Exemples

1. Soit $F = \dfrac{X^2+1}{X^2(X-1)}$. Déterminer les pôles et les zéros de F dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Même question pour $F = \dfrac{X^2(X+1)^3}{(X^2+1)^2(X+2)^2(X-1)^4}$.

Définition. Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des **éléments simples**.

Remarque. Les éléments simples sont différents sur $\mathbb{C}[X]$ ou sur $\mathbb{R}[X]$.

6.2 Décomposition théorique en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$

Définition. Un **élément simple dans** $\mathbb{C}[X]$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{C}[X]$ de la forme :

$$\frac{\lambda}{(X-a)^n}(\text{dite de } 1^{\text{ère}} \text{ espèce}), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C},\ \text{a} \in \mathbb{C}, \text{n} \in \mathbb{N}^*.$$

• Toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme $E(X)$ et d'éléments simples de $\mathbb{C}[X]$,

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{mi} \frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, E est la partie entière.

Exemples

1. Soit $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{X^3 + iX^2 + iX + 1}{(X-2)^4}$. Donner la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Même question pour $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{X^2 + X + i}{(X+1)^2(X+2)(X-j)^3}$.

6.3 Décomposition théorique en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

Définition. Un **élément simple dans** $\mathbb{R}[X]$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{R}[X]$ de la forme :

$$\frac{\lambda}{(X-a)^n} \text{ ou } \frac{\beta X+\gamma}{(X^2+bX+c)^n}(\text{dite de } 2^{\text{ème}} \text{ espèce}),$$

avec $\lambda \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ \Delta = b^2-4c<0,\ n \in \mathbb{N}^*$.

• Toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme $E(X)$ et d'éléments simples de $\mathbb{R}[X]$,

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{mi} \frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{ni} \frac{b_{ij}X+c_{ij}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^j}$$

avec les $\alpha_i \in \mathbb{R},\ \beta_i \in \mathbb{R},\ \gamma_i \in \mathbb{R},\ \Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0,\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ \ b_{ij} \in \mathbb{R},\ c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Remarque. Le polynôme de degré deux qui apparaît dans un élément simple de $2^{ème}$ espèce est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple

1. Trouver la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{3X^4+5X^3+8X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$.

2. Même question pour $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{X^3+X^2+X+1}{(X-1)^2(X^2+X+1)^3}$.

3. Même question pour $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{X^2+1}{X^2(X^2-X+1)^3(X^2+1)^2(X-2)}$.

6.4 Calcul des coefficients de la décomposition théorique en éléments simples

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle.
Pour écrire la décomposition en éléments simlpes (D.E.S) de F dans $\mathbb{K}[X]$:

1. On commence par déterminer la partie entière.
   Si $\deg A < \deg B$ alors $E(X) = 0$.
   Si $\deg A \geq \deg B$ alors nous effectuons la division euclidienne de A par B :
   $A = EB + R$ donc $F = \dfrac{A}{B} = E + \dfrac{R}{B}$ où $\deg R < \deg B$.
   La partie entière est donc le quotient de cette division. Et on s'est ramené au cas d'une fraction $F_1 = \dfrac{R}{B}$ avec $\deg R < \deg B$.
2. La deuxième étape consiste à écrire la décomposition primaire de B dans $\mathbb{K}[X]$ c'est-à-dire écrire B comme un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Il faut ensuite déterminer la décomposition théorique en éléments simples de F (ou de F_1).
4. Enfin, il suffit de mener des calculs pour déterminer les coefficients de la décomposition théorique en éléments simples.

6.4.1 Éléments simples de $1^{\text{ère}}$ espèce : cas des pôles simples

Proposition. Soit $F = \dfrac{A}{B}$ est une fraction rationnelle avec $\deg(A) < \deg(B)$.
Supposons que la factorisation de B dans $\mathbb{K}[X]$ est donnée par :

$$B = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)...(X - \alpha_q).$$

La décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F = \frac{a_1}{X - \alpha_1} + \frac{a_2}{X - \alpha_2} + \ldots + \frac{a_q}{X - \alpha_q}$$

et on a :

$$a_i = (X - \alpha_i) \left.\frac{A(X)}{B(X)}\right|_{X=\alpha_i}, \ i = 1, ..., q.$$

Remarque. L'écriture $(X - \alpha_i) \left.\dfrac{A(X)}{B(X)}\right|_{X=\alpha_i}$ signifie qu'on évalue la fraction $\dfrac{A}{B}$ en $X = \alpha_i$ après avoir simplifier le facteur $X - \alpha_i$ du dénominateur. En d'autres termes,

$$a_i = \frac{A(\alpha_i)}{B_1(\alpha_i)} = \frac{A(\alpha_i)}{(\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2)...(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})...(\alpha_i - \alpha_q)}, \text{ où } B_1(X) = \frac{B(X)}{X - \alpha_i}, \ i = 1, ..., q.$$

Puisque $B\,'(X) = B_1\,'(X)(X - \alpha_i) + B_1(X)$ alors $a_i = \dfrac{A(\alpha_i)}{B\,'(\alpha_i)}, \ i = 1, ..., q$ où $B\,'$ et $B_1\,'$ sont les dérivées de B et B_1 respectivement.

Exemples

1. Décomposer la fraction $F = \frac{A}{B} = \frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Décomposer la fraction $F = \frac{A}{B} = \frac{X+3}{X^3 - 3X^2 + 2X}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Décomposer la fraction $F = \frac{A}{B} = \frac{1}{X^2+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarque. La D.E.S de F dans $\mathbb{C}[X]$ est la même que dans $\mathbb{R}[X]$ si la factorisation de B est la même dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (c.à.d les pôles de F sont tous réels).

6.4.2 Éléments simples de $1^{ère}$ espèce : cas des pôles multiples

Proposition. Soit $F = \dfrac{A}{B}$ est une fraction rationnelle avec $\deg(A) < \deg(B)$.
Supposons que la factorisation de B dans $\mathbb{K}[X]$ est donnée par $B = (X-a)^m B_1$ tel que $B_1(a) \neq 0$.
La décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F = \frac{a_m}{(X-a)^m} + \frac{a_{m-1}}{(X-a)^{m-1}} + \dots$$

On commence par calculer a_m (le coefficient associé à la plus grande singularité). Pour celà, on utilise la même technique qu'on a utilisée pour un pôle simple.

$$a_m = (X-a)^m \left. F(X)\right|_{X=a} = \frac{A(a)}{B_1(a)}.$$

Attention : Cette technique fonctionne seulement pour le calcul du coefficient associé à la plus grande singularité.

Pour calculer les autres coefficients :
- on calculera $F(X)$ pour certaines valeurs de X,
- on calculera $\lim\limits_{X\to+\infty} XF(X)$ pour obtenir des relations entre les coefficients cherchés,
- on utilisera éventuellement la parité ou l'imparité de F,
- on utilisera la division suivant les puissances croissantes.

Pour comprendre au mieux les trois premières techniques citées ci-dessus permettant de calculer les coefficients de la D.E.S dans le cas d'un pôle multiple, on continue sur des exemples.

Exemple 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction $F = \dfrac{X+2}{(X-1)^3}$.

Exemple 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^3(X^2-1)}$.

Exemple 3

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$.

Méthode de division suivant les puissances croissantes

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ est une fraction rationnelle avec $\deg(A) < \deg(B)$.
Supposons que $B(X) = X^p B_1(X)$ tel que $B_1(0) \neq 0$ et que la décomposition de F s'écrit

$$F = \frac{a_p}{X^p} + \frac{a_{p-1}}{X^{p-1}} + \ldots + \frac{a_1}{X} + F_1(X).$$

Alors,

$$\frac{A}{X^p B_1} = \frac{1}{X^p}\Big(a_p + a_{p-1}X + \ldots + a_1 X^{p-1}\Big) + F_1(X).$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{A}{B_1} = \Big(a_p + a_{p-1}X + \ldots + a_1 X^{p-1}\Big) + X^p F_1(X).$$

C'est la division suivant les puissances croissantes du numérateur par $B_1(X)$ à l'ordre $p-1$ et les coefficients a_i, $i = 1, ..., p$ sont les coefficients du quotient de cette division.

Remarque. Cette technique est utilisable **seulement** pour trouver les coefficients associés à un pôle multiple qui vaut zéro, c'est-à-dire quand on a un terme X^p en dénominateur. Elle nous permettra de trouver les valeurs de a_i, $i = 1, ..., p$ en même temps, d'où son intérêt si $p \geq 3$.

Exemple 1

Déterminer la D.E.S dans $\mathbb{R}[X]$ de $F = \dfrac{1}{X^3(X-1)^3}$.

Remarque. On peut également utiliser la méthode de division suivant les puissances croissantes pour calculer les coefficients associés à $(X-1)^3$. Il faudra avant cela effectuer un changement de variable $Y = X - 1$ pour transformer le pôle 1 en un pôle nul.

Exemple 1 : suite

Remarque. Notons que la décomposition en éléments simple de F faite ci-dessus est vraie dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ car tous les pôles de F sont des réels et donc la décomposition primaire du dénominateur est la même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^3(X^2-1)}$.

6.4.3 Éléments simples de $2^{ème}$ espèce

Proposition. Soit $\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+bX+c}$ un élément simple de $2^{ème}$ espèce, avec $\alpha, \beta,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, et $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{c} < 0$. Ce type d'éléments simples apparaît seulement lorsqu'on fait une DES dans $\mathbb{R}[X]$.
Le polynôme X^2+bX+c est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On appelle γ et $\bar{\gamma}$ ses deux racines complexes (conjuguées).
Pour calculer α et β en même temps dans le terme $\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+bX+c}$, on mutliplie (comme dans le cas des éléments de $1^{ère}$ espèce) par X^2+bX+c et on évalue ensuite en γ ou $\bar{\gamma}$.
On obtiendra une égalité entre deux nombres complexes et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit les valeurs de α et de β.

Remarque. Il n'est pas nécéssaire de calculer γ dans cette démarche, ce qui nous intéresse ce n'est pas sa valeur mais ce qu'il vérifie (comme par exemple $\gamma^2 = -b\gamma - c$).

Exemple 1

Déterminer la D.E.S de $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X^2-1)}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2

Déterminer la D.E.S de $F = \dfrac{1}{(X+1)(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercices

1. Montrer que la D.E.S dans $\mathbb{R}[X]$ de $F = \dfrac{X+1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$ est donnée par :

$$F = \frac{\frac{1}{2}X}{X^2+X+1} + \frac{\frac{1}{2}X+1}{X^2-X+1}.$$

Indication : Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $-j$ et $-\bar{j}$.

2. Déterminer la D.E.S dans $\mathbb{C}[X]$ de $F = \dfrac{X^2+1}{X^4+1}$.

6.5 Exercices.

Exercice 6. 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \dfrac{X^6 - 3X^4 - 3X^2 - 5}{X^2 - 4}$
2. $F = \dfrac{2X + 1}{(X^2 - 1)^2}$
3. $F = \dfrac{1}{X^3 + 1}$
4. $F = \dfrac{1}{X^4 + X^2 + 1}$
5. $F = \dfrac{(X^2 + 4)^2}{(X^2 + 1)(X^2 - 2)^2}$
6. $F = \dfrac{X^2}{(X + 1)^3(X - 1)^2}$

Exercice 6. 2. Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 6. 3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions :

1. $\dfrac{1}{X^n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
2. $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$

CHAPITRE 7

Suites numériques

7.1 Généralités sur les suites

7.1.1 Définition d'une suite

Définition. Une **suite** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle **terme général** de la suite.
La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où simplement (u_n).

Remarque. Il arrive souvent que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel $n_0 > 0$, on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples

— $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes : 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...
— $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est la suite qui alterne $+1$, -1, $+1$, -1,...
— $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$. Les premiers termes sont 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ...

Remarque. Il existe deux manières de définir une suite :

— de façon explicite, ie. la suite est définie directement en fonction de la variable n.
Exemple : $u_n = n^2\cos(n+1)$.

— Par récurrence, i.e. le terme u_n s'exprime en fonction des termes précédents.
Exemple : $u_{n+1} = u_n - 6$, les termes de la suite sont calculés de proche en proche.

Le principe de récurrence :

Pour déterminer, les termes d'une suite, on peut, dans certains cas, utiliser le principe de récurrence.

Proposition. Soit $P(n)$ la propriété dépendant de la variable $n \in \mathbb{N}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si

— la propriété $P(n_0)$ est vraie,
— pour un entier $n^* \geq n_0$, $P(n^*)$ est vraie implique que $P(n^*+1)$ est vraie

alors $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple

Montrer par récurrence l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7.1.2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Exemples

— $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

— $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$.

— $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$.

7.1.3 Suite croissante, décroissante

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$ c.à.d $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ c.à.d $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

.

Exemples

— La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ ...

— La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

7.1.4 Suites extraites

Définition. Une suite **extraite** ou sous-suite de la suite (u_n) est une suite obtenue en sélectionnant, dans l'ordre, un sous-ensemble infini de termes de la suite (u_n).

Exemples

— (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite (u_n).

— $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)$ sont deux suites extraites de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$. En effet,

---

Exercice

1. Soit $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. u_n est-elle monotone ? bornée ?
2. Soit $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ avec $u_0 = 2$.
   (a) Monter que $u_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Monter que u_n est décoissante.

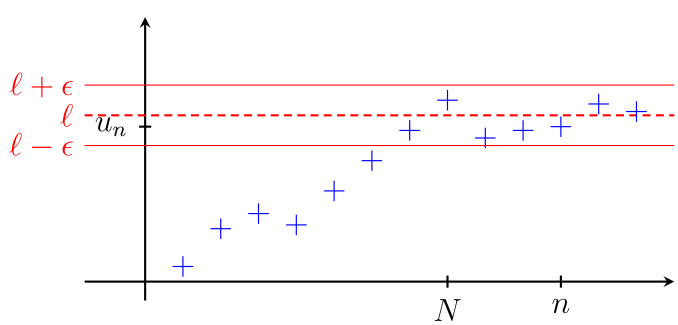
7.2 Limite et convergence d'une suite

7.2.1 Définitions

Définition. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \epsilon$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon)$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ, à partir d'un certain rang.



Remarque. Noter que N dépend de ϵ et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du « pour tout » et du « il existe ».

Définition. On dit que

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies u_n \leq -A)$$

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est **divergente** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Exemples

1. La suite $u_n = n^2$ est-elle convergente ?

2. La suite $u_n = \cos(n)$ est-elle convergente ?

3. La suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est-elle convergente ?

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si (u_n) est convergente, sa limite est unique.
2. Si (u_n) converge, elle est bornée.
   Conséquence : si la suite (u_n) n'est pas bornée, elle diverge.
3. Si (u_n) est convergente vers ℓ, toute suite extraite de (u_n) est convergente vers ℓ.

Exemple

La suite $u_n = \dfrac{1}{n!}$ est-elle convergente ?

7.2.2 Propriétés des limites

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$,
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$.

Exemple

Soit $u_n=(-1)^n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|$. Conclure.

Proposition. (**Opérations sur les limites**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et ℓ'.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n=\ell\ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n=a\ell$, $a\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\ell}{\ell'}$ avec (v_n) non nulle pour n grand.

Proposition. (**Opérations sur les limites infinies**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n}=0$.
2. si (u_n) est minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$
3. si (u_n) est minorée par $\lambda>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=+\infty$
4. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ et $u_n>0$ pour n assez grand alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=+\infty$.

7.2.3 Formes indéterminées

1. "$0.\infty$" Il faut utiliser les croissances comparées. Par exemple,
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\ln n}.e^n=\ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}.\ln n=\ldots$
2. "$+\infty-\infty$" Il faut mettre en facteur les termes de plus haut degré ou bien multiplier par le conjugué. Par exemple,
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^n-\ln n)=\ldots$

   $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-n^2)=\ldots$

   $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2})=\ldots$

3. "1^{∞}" Il faut passer à la forme exponentielle. Par exemple,
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n})^n =$...

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}} = ...$

7.2.4 Limite et inégalités

Proposition.
1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
4. **Théorème des gendarmes** :
   Si $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple

Calculer la limite de la suite $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{1+n+n^2}$.

7.2.5 Théorème de convergence

Proposition. Soit (u_n) une suite.

- si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.
- si (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge.

Remarque. 1. Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

2. Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. Déduire que (u_n) est convergente $\forall n \geq 1$.

7.2.6 Suites adjacentes

Définition. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

Démonstration :

Remarque. Il y a donc deux résultats dans ce théorème, la convergence de (u_n) et (v_n) et en plus l'égalité des limites.
Les termes des suites sont ordonnées ainsi :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots\cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

Exemple

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et donner un encadrement de leur limite commune.

Solution :

7.3 Suites équivalentes et suites remarquables

7.3.1 Suites équivalentes

Définition. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, noté $u_n \sim_{+\infty} v_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (avec (v_n) non nulle pour n grand).

Opérations sur les équivalents Si $u_n \sim_{+\infty} a_n$ et $v_n \sim_{+\infty} b_n$ alors $u_n v_n \sim_{+\infty} a_n b_n$ et $\frac{u_n}{v_n} \sim_{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Attention, on n'a pas toujours $u_n + v_n \sim_{+\infty} a_n + b_n$.

Proposition. Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Déterminer une suite équivalente à $\sin\frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

7.3.2 Suites remarquables

Suite arithmétique

Définition. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$ (i.e. $u_{n+1} - u_n = r$) où $r \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
Si $u_{n_0} \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite, alors elle s'écrit sous la forme suivante : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ pour tout $n \geq n_0$.

Proposition. Soit (u_n) une suite arithmétique, alors la somme de termes consécutifs est : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$

Exemple

Soit $u_n = n$. Monter que (u_n) est une suite arithmétique et calculer sa somme S_n.

Suite géométrique

Définition. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n$ (i.e. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$) où $q \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
Si $u_{n_0} \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite, alors elle s'écrit sous la forme suivante : $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.

Proposition. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (i.e. $u_n = u_0.q^n$)
- Si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.
- Si $q = 1$, (u_n) est constante.
- Si $q = -1$, (u_n) diverge.

- Si $|q| > 1$, (u_n) diverge
- Si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple

Soit $u_n = (\frac{-1}{5})^n$. Monter que (u_n) est une suite géométrique et calculer sa somme S_n.

Suite arithmético-géométrique

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r$ où $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. Pour l'étude d'une telle suite, si $q \neq 1$ on détermine le réel k tel que $k = qk + r$, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - k$ est géométrique de raison q.

7.4 Exercices.

Exercice 7. 6. Calculer les limites des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}}$
2. $u_n = \dfrac{(n^2+1)^{\frac{1}{3}}}{n+2}$
3. $u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 4^n}$
4. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

Exercice 7. 7. En utilisant un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 7. 8. On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En déduire la limite de la suite définie par $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

Exercice 7. 9. Soient $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ avec $n \geq 1$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

Exercice 7. 10. Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{N}$ et :

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ et } v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

1. Montrer que (u_n) et(v_n) sont adjacentes (*on pensera aux formules de duplication*).
2. Déterminer la limite commune de (u_n) et (v_n)

Exercice 7. 11. Donner le sens de variations et éventuellement la limite de la suite récurrente

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \text{ avec } u_0 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. 12. Soient $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 3}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la nature de la suite et déterminer sa limite éventuelle.

CHAPITRE 8

Calcul intégral

8.1 Méthodes de calcul des intégrales

Pour trouver une primitive d'une fonction f, on peut parfois reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue mais c'est très rarement ce cas.
Nous allons donc voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : le changement de variable et l'intégration par parties.

8.1.1 Changement de variable

Théorème. Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\Big(\varphi(t)\Big) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Démonstration :

Remarque. La formule de changement de variables n'est rien d'autre que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.

Exemples

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

8.1.2 Intégration par parties

Théorème. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. On a :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

où $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Remarque. La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration :

Quand utiliser l'intégration par parties ?

Lorsqu'on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f écrite comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais que l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple parce que la dérivée de u est une fonction plus simple que u comme pour les fonctions ln ou arctan).

Exemples

1. Calculer $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$.

2. Calculer $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Exemple

Calculer $\int x^2 e^x \, dx$.

8.2 Intégration des fractions rationnelles

Soit $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels.
On cherche à intégrer R. Pour celà, on fait la la DES de la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ qui s'écrit comme une somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples.
On sait intégrer le polynôme $E(x)$. Il reste alors à savoir intégrer les éléments simples.

— **Intégration de l'élément simple** $\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^k}$ **:**

1. Si $k = 1$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma \, dx}{x - x_0} = \gamma \ln|x - x_0| + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
2. Si $k \geq 2$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma \, dx}{(x-x_0)^k} = \gamma \int (x-x_0)^{-k} \, dx = \frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).

— **Intégration de l'élément simple** $\dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)}$ **où** $\Delta = b^2 - 4c < 0$ **:**

1. Dans un premier temps, on fait apparaître au numérateur la dérivée $2x+b$ du dénominateur pour obtenir une fraction du type $\dfrac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).
2. Un terme supplémentaire de la forme $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c} \, dx$ apparaît. On écrit alors le polynôme x^2+bx+c sous forme canonique et par un changement de variable $u = px+q$, on se ramène à calculer une primitive du type $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.

Exemples

1. Calculer $\int f(x)\,dx$ avec $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

2. Calculer $\int f(x)\,dx$ avec $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

8.3 Intégration des fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

On souhaite calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)\, dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\, dx$ quand P et Q sont des polynômes.

1. Soit $P(\cos x, \sin x)$ un polynôme trigonométrique c'est-à-dire une combinaison linéaire de $\cos^m x \sin^n x$. On a trois situations :
   — Si m est impair, alors on pose $u = \sin x$ dans $\int P(\cos x, \sin x)\, dx$
   — Si n est impair, alors on pose $u = \cos x$ dans $\int P(\cos x, \sin x)\, dx$.
   Ensuite on utilise dans les deux cas l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   — Si m et n sont pairs, on linéarise le produit (on le transforme en une somme en utilisant les formules trigonométriques ou les formules d'Euler).

   Notons que la linéarisation marche à tous les coups !

Exemples

(a) Calculer la primitive suivante : $\int \cos^2 x \sin x\, dx$.

(b) Calculer la primitive suivante : $\int \cos^3 x\, dx$.

---

2. Soit $R(\cos x, \sin x)$ une fraction rationnelle.

On souhaite calculer $\int R(\cos x, \sin x)\ dx = \int f(x)\ dx$.

Il existe deux méthodes :

(a) les **règles de Bioche** sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;

(b) le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche

On note $\omega(x) = f(x)\ dx$. On a alors

$$\omega(-x) = f(-x)\ d(-x) = -f(-x)\ dx \text{ et } \omega(\pi - x) = f(\pi - x)\ d(\pi - x) = -f(\pi - x)\ dx.$$

— Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.

— Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.

— Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple

Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{2 - \cos^2 x}$.

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

Avec $t = \tan \frac{x}{2}$, on a : $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ $\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

En effet,

Exemple

Calculer l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

8.4 Intégration des polynômes exponentielles

On cherche les primitives de $P_n(x)e^{\lambda x}$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe deux méthodes :

1. faire des intégrations par parties (n fois) mais c'est très long !
2. par identification : On peut montrer par récurrence que

$$\int^y P_n(x)e^{\lambda x}\,dx = Q_n(y)e^{\lambda y} + c,$$

où Q_n est un polynôme de degré n.
Il suffit donc de dériver et de faire une identification.

Exemple

Calculer l'intégrale $\int^x t^2 e^t\,dt$:

8.5 Exercices.

Exercice 8. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
3. Si f est T-périodique alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exercice 8. 2. Trouver les primitives ou calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 (1-\mid x-1\mid)^3\ dx,\quad \int \cos x \ln(\sin x)\ dx \quad \int \cos^2(\frac{x}{2})\ dx \quad \int \frac{x^3}{e^x}\ dx,\quad \int e^{-2x}\cos x\ dx,$$
$$\int (x^2+1)e^{-x}\ dx,\quad \int e^x\cos(x)\ dx,\quad \int \sin^8(x)\cos^3(x)\ dx,\quad \int \frac{dx}{x}.$$
$$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2(2x)}\ dx,\quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx,\quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx,\quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+15}},\quad \int_1^e \sin(\ln x)\ dx.$$

Exercice 8. 3. Trouver les primitives ou calculer les intégrales suivantes :
$$\int \sin^8 x\cos^3 x\ dx,\quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\ dx,\quad \int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x},\quad \int \tan^3 x + 2\tan^2 x\ dx.$$

Exercice 8. 4. En utilisant dans chaque cas un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\ t}{1+\sin\ t}dt \quad b) \quad \int_1^4 \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt \quad c) \int_0^1 \frac{3t+1}{(t+1)^2}dt \quad d) \int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t(1+\ln^2\ t)}dt$$
$$e) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan t}{1+\cos t}dt \quad f) \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t(1-\sin t)}$$

Exercice 8. 5. En utilisant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$A(t) = \frac{t^3-t^2+3t-2}{t^2-t} \quad B(t) = \frac{t}{t^2-t+1} \quad C(t) = \frac{1}{t(t^2+1)}$$

Exercice 8. 6. Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt$.

1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire la valeur de I et J.

CHAPITRE 9

Equations différentielles

9.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation :

— dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ;
— dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première $y\,'$, ou dérivées d'ordres supérieurs $y\,''$, $y^{(3)}$, ...).

Voici des équations différentielles faciles à résoudre.

Exemples

Voici des équations différentielles avec leurs solutions :

1. $y\,'(x) = \sin x \qquad y(x) = -\cos x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. $y\,' = 1 + e^x \qquad y(x) = x + e^x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
3. $y\,' = 3y \qquad y(x) = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Passons à la définition complète d'une équation différentielle et surtout d'une solution d'une équation différentielle.

Définition. .

— Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme :

$$F\left(x, y, y\,', y\,'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

— Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarque. Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x\,'')^3 + t(x\,')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t. On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie l'équation précédente.

9.2 Equations différentielles linéaires

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur deux types d'équations : les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.

— Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y\,' + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes $y, y\,', y\,'', ...$

— Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y\,' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

— Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0 y + a_1 y\,' + ... + a_n y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

9.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation différentielle de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad (E)$$

où y est une fonction réelle de la variable t, y' sa dérivée par rapport à t et a, b, c sont trois fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On appelle **solution** sur I de l'équation différentielle (E) toute fonction f dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t) \quad \forall t \in I.$$

Si c est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite **homogène** ou **sans second membre**.

Remarque. Si $a(t)$ ne s'annule pas sur I, (E) peut-être écrite sous la forme :

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t),$$

avec $\alpha(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$ et $\beta(t) = \dfrac{c(t)}{a(t)}$ sont des fonctions continues sur I.

Exemples

1. $y'(t) + 2ty(t) = e^t$

2. $y'(t) + 2ty(t) = 0$

3. $y'^2(t) - y(t) = t + 1$ ou $y''y'(t) - y(t) = 0$

Proposition. Soit l'équation différentielle homogène (E_0) associée à l'équation différentielle (E) :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (E_0)$$

Si y_p est une solution particulière de (E) et si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation (E_0), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{y_p + y_h \;\text{ où } y_h \in \mathcal{S}\}$$

Le résultat précédent montre alors que pour résoudre (E), il suffit de connaître une solution particulière y_p de (E) et les solutions générales y_h de l'équation homogène (E_0).

9.3.1 Résolution de l'équation homogène

On suppose que $a(t)$ ne s'annule pas sur I et qu'elle est continue en tout $x \in I$. La division de l'équation (E_0) par $a(t)$ permet de retrouver la forme suivante :

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0 \quad (E_{00})$$

On veut résoudre l'équation différentielle homogène (E_{00}).

Théorème. Soit A une primitive de α sur I, $A(t) = \int \alpha(t)\, dt$.
Les solutions sur I de l'équation différentielle homogène (E_{00}) sont définies par :

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)}$$

où C est une constante arbitraire.

Démonstration : Une preuve rapide du théorème précédent est la suivante :

Remarque. Si $a(t)$ s'annule en des points sur I : dans ce cas, on ne peut pas écrire (E_0) sous la forme (E_{00}).
Il faut être prudent et résoudre l'équation dans les intervalles où $a(t) \neq 0$.
Attention, à chaque intervalle correspond une constante et il n'y a pas de raison de supposer à priori qu'il s'agit de la même constante !

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $t^2y'(t) = y(t)$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

9.3.2 Résolution de l'équation avec second membre

On revient au cas général de l'équation différentielle avec second membre

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t) \quad (E).$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0 \quad (E_{00}).$$

Pour résoudre (E), il suffit d'ajouter aux solutions de (E_{00}) une solution particulière de (E). Pour trouver une solution particulière de (E), on peut parfois remarquer une solution évidente.

Exemples

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2ty + 4t$.

2. Résoudre cette équation différentielle : $ty' + y = 1,\ t > 0$.

Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante (M.V.C.)

Le nom de cette méthode est paradoxal mais justifié !

Cette méthode consiste à chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)},$$

où C est maintenant une fonction dérivable à déterminer pour que y_p soit une solution de (E).

En dérivant et en utilisant le fait que $A'(t) = \alpha(t)$, on a :

$$y_p'(t) = -\alpha(t)C(t)e^{-A(t)} + C'(t)e^{-A(t)} = -\alpha(t)y_p(t) + C'(t)e^{-A(t)}.$$

Comme y_p est une solution de (E), on a $y_p'(t)+\alpha(t)y_p(t)=\beta(t)$
D'où,

$$C'(t)e^{-A(t)}=\beta(t)\Leftrightarrow C(t)=\int\beta(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Il faut donc calculer une primitive $\beta(t)e^{A(t)}$ et la solution générale de l'équation différentielle (E) est donnée par :

$$y(t)=y_p(t)+Ce^{-A(t)},\quad C\in\mathbb{R}.$$

Exemples

1. Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ \ y'+y=e^t+1.$

2. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $(E)\ :\ \ ty'(t)-y(t)=t^2e^t.$

Exemple

Résoudre l'équation $(E)\ :\quad (1+t^2)y'(t)+4ty(t)=1.$

Exemple où la fonction a s'annule sur I

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\quad ty'(t)-2y(t)=t^3.$

Exemple où $b(t) = a'(t)$

Résoudre l'équation différentielle : $\cos t\; y'(t) - \sin t\; y(t) = \ln t,\;\; t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

9.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants**, une équation différentielle de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
On appelle **solution** sur I de l'équation différentielle (E) toute fonction g deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$ag''(t) + bg'(t) + cg(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Si f est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite **homogène** ou **sans second membre**.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, si y est solution de (E) alors y s'écrit :

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y_h est la solution de l'équation homogène associée à (E).

9.4.1 Résolution de l'équation homogène

On considère l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad (E_0)$$

On cherche une solution de (E_0) sous la forme

$$y_h(t) = e^{rt}$$

où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. En remplaçant dans (E), on trouve

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = 0 \\ \iff & (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\ \iff & ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition. L'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **le polynôme caractéristique** (P.C.) associé à (E_0).

Trois cas sont possibles suivant le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de (PC).

1. Si $\Delta > 0$, (PC) possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont données par :
$$y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si $\Delta = 0$, (PC) possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont données par :
$$y_h(t) = C_1 e^{r_0 t} + C_2 \mathbf{t} e^{r_0 t} \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si $\Delta < 0$, (PC) possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions réelles de (E_0) sont données par :
$$y_h(t) = e^{\alpha t}\Big(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\Big) \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

9.4.2 Résolution de l'équation avec second membre

On considère maintenant l'équation différentielle avec second membre :

$$ay^{''}(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (E)$$

Comme on l'a déjà dit, les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène (E_0) à une solution particulière y_p de (E).
Pour trouver y_p, on utilise en règle générale la méthode de variation de la constante. Cette méthode reste quand-même lourde car il faudra résoudre un système à deux équations en $C_1^{'}$ et $C_2^{'}$ puis faire les deux primitives dans lesquelles intervient $f(t)$.

On donne ci-dessous deux cas particuliers importants pour la recherche d'une solution particulière sans utiliser la M.V.C.

Cas où $f(t) = P_n(t)e^{rt}$

Supposons que le second membre $f(t) = P_n(t)e^{rt}$, avec $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $P_n(t)$ est un polynôme de degré n.

— Si r n'est **pas une racine de (PC)** alors

$$y_p(t) = Q_n(t)e^{rt}$$

où $Q_n(t)$ est un polynôme de degré n.

— Si r est **une racine simple de (PC)** alors

$$y_p(t) = \mathbf{t}Q_n(t)e^{rt}$$

où $Q_n(t)$ est un polynôme de degré n.

— Si r est **une racine double de (PC)** alors

$$y_p(t) = \mathbf{t^2}Q_n(t)e^{rt}$$

où $Q_n(t)$ est un polynôme de degré n.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad y'' - 5y' + 6y = 4te^t$.

1. **Équation homogène :**

2. **Solution particulière :**

Exercices avec indications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$.
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x}$.
3. $y'' - 2y' + y = (x - 1)e^{x}$.

Indications : Les solutions générales de ces équations sont respectivement :

1. $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} + (\frac{x}{4} + \frac{5}{16})e^{-x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(\frac{-x}{2} - 1)e^{x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y(x) = C_1e^x + C_2xe^{x} + x^2(\frac{x}{6} - \frac{1}{2})e^{x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Cas où $f(t) = e^{\alpha t}\Big(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\Big)$

Supposons que le second membre $f(t) = e^{\alpha t}\Big(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\Big)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et P_1, P_2 deux polynômes.

— Si $\alpha + i\beta$ n'est **pas une racine de (PC)**, alors

$$y_p(t) = e^{\alpha t}\Big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\Big),$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

— Si $\alpha + i\beta$ est **une racine de (PC)**, alors

$$y_p(t) = te^{\alpha t}\Big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\Big),$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad y'' - 4y' + 3y = te^t \cos t$.

Principe de superposition

Le principe de superposition est basé sur le fait que si :

— $y_{p_1}(t)$ est une solution particulière de $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t)$

— $y_{p_2}(t)$ est une solution particulière de $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_2(t)$

alors $y_p(t) = \lambda_1 y_{p_1}(t) + \lambda_2 y_{p_2}(t)$ est une solution particulière de $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E) \quad y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\text{sh}\, t$.

Exercice avec indications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' = \cos^3 x.$$

Indications : On linéarise le second membre et on utilise le principe de superposition.
Les solutions générales sont :

$$y(x) = \lambda + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(3x), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

9.5 Exercices.

Exercice 9. 1. Résoudre les équations différentielles linéaires, en précisant les ensembles de définition de leurs solutions :

a) $y' = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$, b) $y' + \dfrac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$,

c) $(x^2+1)y' + xy = 1$, d) $(x^2+1)y' - (2x+1)y = -2x^2 + x + 1$,

e) $y' - yx = e^x$. f) $y' - 2y = xe^{-|x|}$ (existence de solutions bornées ?).

Exercice 9. 2. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$(1+x^2)y' + \frac{x^2-1}{x}y = -2.$$

Indication : Chercher a,b et c tels que $\dfrac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

Exercice 9. 3. On considère l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 5e^{2x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle.
3. En déduire une solution générale de l'équation différentielle.
4. Donner la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9. 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 6y = 1 - 8t - 30t^2,\ \ y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$$

$$y'' - 4y' + y = t\cos 2t,\ \ 2y'' + 2y' + y = te^{-t},\ \ y'' + y' = (\cos t)^3.$$

Exercice 9. 5. En utilisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' + y + y^2 = 0.$$

Exercice 9. 6. En posant $x = \tan t$, résoudre $y'' + \dfrac{2ty'}{1+t^2} + \dfrac{y}{(1+t^2)^2} = 0$.

CHAPITRE 10

Ensembles

10.1 Ensembles

10.1.1 Généralités

Les notions d'ensemble et d'élément sont des notions premières.

Définition. Un **ensemble** correspond intuitivement à une collection d'**éléments**.

Exemples

$$\{0,1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}, \quad \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}.$$

Voici une autre manière de définir des ensembles : une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\Big\}, \quad \Big\{z \in \mathbb{C} \mid z^5 = 1\Big\}, \quad \Big\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\Big\} = [0,1].$$

• On dispose de deux types d'assertions :
— $a \in E$ qui se lit : a **appartient** à E ou a est élément de E et dont la négation s'écrit $a \notin E$.
— $E \subset F$ qui se lit : E **inclus** dans F et qui signifie que tout élément de E est aussi élément de F.
Autrement dit : $\forall x \in E,\ x \in F$.
On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F.
La négation s'écrit $E \not\subset F$.

• Deux ensembles E et F sont **égaux** ($E = F$) si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
Pour démontrer une égalité d'ensembles, on prouvera donc en général une double inclusion.

• Un ensemble particulier est l'**ensemble vide**, noté $\varnothing$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble.

• Si E est un ensemble, il existe un ensemble, appelé **ensemble des parties** de E et noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont tous les ensembles inclus dans E.
Il vérifie donc, pour tout ensemble F :

$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Exemple

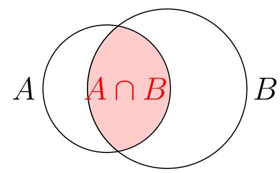
Soit $E = \{1,2,3\}$. L'ensemble des parties de E est donné par :

10.1.2 Opérations sur les parties

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle :

• **intersection** de A et B est une partie de E définie par :

$$A \cap B = \Big\{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\Big\}.$$

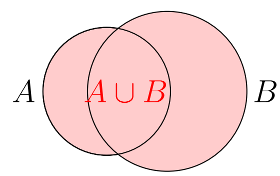


Remarque. Si $A \cap B = \varnothing$ alors A et B sont deux ensembles disjoints.

• **réunion** de A et B est une partie de E définie par :

$$A \cup B = \Big\{x \in E \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\Big\}.$$

Le « *ou* » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.



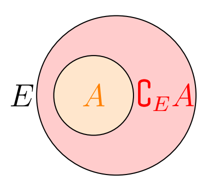
• **complémentaire** de A dans E, la différence :

$$\complement_E A = E - A = \Big\{x \in E \mid x \notin A\Big\}.$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste $\complement A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou $\overline{A}$).

• **différence** de A et de B est une partie de E définie par :

$$A \setminus B = \Big\{x \in A \mid x \notin B\Big\} = A \cap B^c.$$



10.1.3 Règles de calculs

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

Commutativité

— $A \cap B = B \cap A$
— $A \cup B = B \cup A$

Associativité

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$)
— $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$)

Distributivité

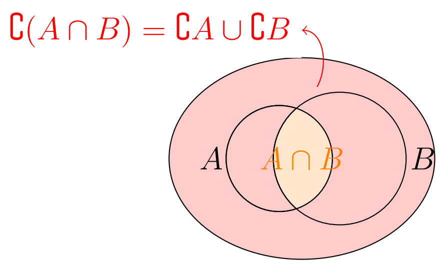
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

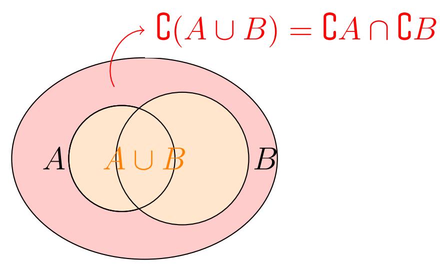
Autres règles

- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A, \quad A \cap E = A$
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup E = E$
- $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$
- $(A^c)^c = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
- $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$

Règle de De Morgan

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$





Démonstration :

10.1.4 Produit cartésien

Définition. Soient E et F deux ensembles.
- Le **produit cartésien**, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \Big\{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\Big\}.$$

- On a la propriété fondamentale suivante :

$$(x,y) = (x^{'}, y^{'}) \iff (x = x^{'} \text{ et } y = y^{'}).$$

- Lorsque $E = F$, le produit cartésien $E \times F$ se note aussi E^2.

- De même, on peut définir la notion de **triplet** (x,y,z) et le produit :

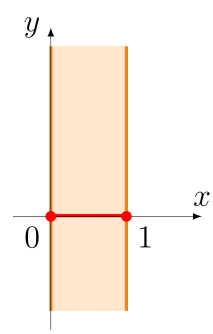
$$E \times F \times G = \Big\{(x,y,z) \mid x \in E,\ y \in F \text{ et } z \in G\Big\}.$$

- Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut définir la notion de **n-uplet** ainsi que l'ensemble :

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \Big\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, ..., x_n \in E_n\Big\}.$$

Exemples

1. Vous connaissez $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Big\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\Big\}$.
2. $[0,1] \times \mathbb{R} = \Big\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\Big\}$



3. $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\Big\}$ est le cube unité.

10.2 Applications

Dans toute cette section, E et F désignent des ensembles quelconques.

Définition. $u : E \to F$ est dite une **application** si pour chaque élément $x \in E$, il existe un unique élément y de F. On note $y = u(x)$.
On appelle **graphe** de l'application u, l'ensemble

$$\Gamma = \Big\{\big(x, u(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}.$$

Avec les notations précédentes :
- E est appelé l'**ensemble de départ** ou l'ensemble de **définition** de u.
- F est l'**ensemble d'arrivée** de u.
- Pour $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $y = u(x)$ s'appelle **image** de x par u.
- Pour $y \in F$, tout $x \in E$ tel que $y = u(x)$ est appelé un **antécédent** de y.
- L'ensemble :

$$\Big\{y \in F \mid \exists x \in E : y = u(x)\Big\} \text{ noté } \Big\{u(x) \mid x \in E\Big\}$$

est l'**ensemble image** de u, c'est une partie de F.

Exemples

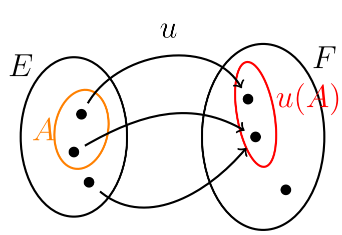
1. L'application u définie par
$$u \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$
est appelée **identité** et se note id_E. Elle sera très utile dans la suite.
2. Les applications u et v définies par
$$u \ : \ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}, \qquad v \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & E - A \end{array}.$$

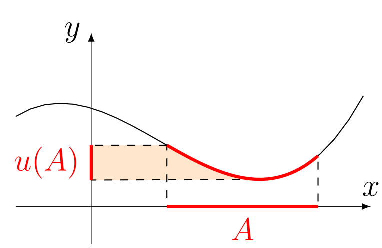
10.3 Image directe, image réciproque

Soient E et F deux ensembles.

Définition. Soient $A \subset E$ et $u : E \to F$. On appelle **image directe** de A par u l'ensemble

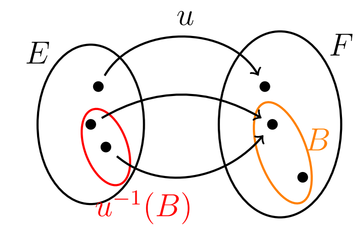
$$u(A) = \Big\{y \mid \exists x \in A \ ; \ y = u(x)\Big\} = \Big\{u(x) \mid x \in A\Big\}.$$

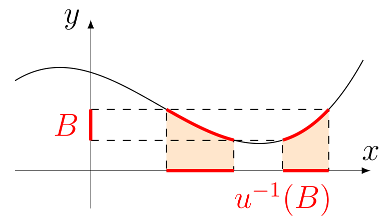




Définition. Soient $B \subset F$ et $u : E \to F$. On appelle **image réciproque** de B par u l'ensemble

$$u^{-1}(B) = \Big\{x \in E \mid u(x) \in B\Big\}.$$





Remarque. Ces notions sont plus difficiles à maîtriser qu'il n'y paraît !

— $u(A)$ est un sous-ensemble de F, $u^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.

— L'utilisation de la notation « $u^{-1}(B)$ » ne suppose pas que u soit bijective. L'image réciproque existe quelque soit l'application.

— L'image directe d'un singleton $u(\{x\}) = \left\{u(x)\right\}$ est un singleton.

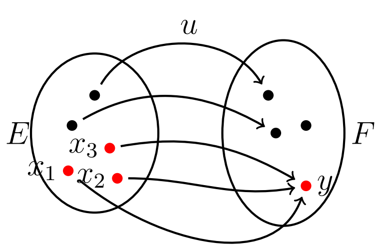
Par contre, l'image réciproque d'un singleton $u^{-1}\left(\{y\}\right)$ dépend de u. Cela peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments, mais cela peut-être E tout entier (si u est une application constante) ou même l'ensemble vide (si aucune image par u ne vaut y).

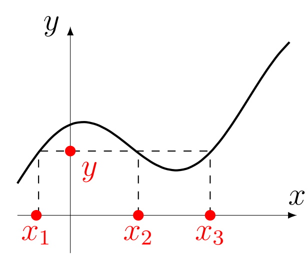
— $u(\varnothing) = \varnothing$ et $u^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

— $u^{-1}(F) = E$ et $u(E) \subset F$ (on a l'égalité si u est surjective).

— En termes d'image réciproque, l'ensemble des antécédents de y par u est $u^{-1}(\{y\})$.

Sur les dessins ci-dessous, l'ensemble des antécédents de y par u est : $u^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$.





Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$.
Calculer les ensembles suivants : $f([0,2])$, $f([-1,2[)$, $f^{-1}([0,4])$, $f^{-1}([-2,-1])$, $f^{-1}([-2,4])$.

10.4 Exercices.

Exercice 10. 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{0, 2, 4\}$

1. Déterminer l'ensemble des parties de E, quel est son cardinal ?

2. Déterminer l'ensemble des parties de F, quel est son cardinal ?

3. Déterminer $E \times F$, quel est son cardinal ?

4. Déterminer $F \times E$, quel est son cardinal ?

Exercice 10. 2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \subset B \Rightarrow E - B \subset E - A$
2. pour toute partie $A \subset B$, on a $E - (E - A) = A$.
3. $(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$

Exercice 10. 3. Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Démontrer que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 10. 4. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Comparer les ensembles suivants :

1. $[0, 1]$ et $f^{-1}(f([0, 1]))$.
2. $[-1, 1]$ et $f(f^{-1}([-1, 1]))$.
3. $f([0, 1] \cap [-1, 0[)$ et $f([0, 1]) \cap f([-1, 0[)$.

CHAPITRE 11

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1 Espaces vectoriels

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u et v pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur λu.
Voici la définition formelle :

Définition. Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** ou un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ s'il est muni :

- d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u+v=v+u$ pour tous $u,v \in E$ (commutativité de $+$)
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$ pour tous $u,v,w \in E$ (associativité de $+$)
3. Il existe un **élément neutre** $0_E \in E$ tel que $u+0_E=u$ pour tout $u \in E$
4. Tout $u \in E$ admet un **symétrique** u' tel que $u+u'=0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$
7. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u,v \in E$
8. $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.
   Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Ceci s'écrit
   $$\mathbb{R}^2 = \Big\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\Big\}.$$
   — Si (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, alors :
   $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$
   — Si λ est un réel et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :
   $$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$
   L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$.
   Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.
3. Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$.
   Un élément $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.
   — Si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :
   $$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n).$$
   — Si λ est un réel et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :
   $$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
   L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.
   Le symétrique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \ldots, x_n)$.
   De manière analogue, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^I = \{f : I \to \mathbb{R}\}$.
   $\mathbb{R}^I$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   — Si $f, g \in \mathbb{R}^I$, alors :
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in I.$$
   — Si λ est un réel et $f \in \mathbb{R}^I$, alors :
   $$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in I.$$
   L'élément neutre de la loi interne est la fonction nulle, définie par :
   $$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Le symétrique de f est l'application $g : I \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Le symétrique de f est noté $-f$.

Exemples de référence

$\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
La loi interne est l'addition de deux polynômes $P(X)+Q(X)$. La loi externe est la multiplication d'un polynôme $P(X)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda.P(X)$). L'élément neutre est le polynôme nul. L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.

11.2 Sous-espaces vectoriels

Il est vite fatiguant de vérifier les 8 propriétés qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une partie F de E est appelée un **sous-espace vectoriel** de E si :
- $F \neq \varnothing$ (il suffit de montrer que $0_E \in F$),
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$ (on dit que F est stable pour l'addition),
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$ (on dit que F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Remarque. Les deux dernières conditions peuvent être regroupées en une seule :

$$\lambda \cdot u + v \in F \text{ pour tous } u, v \in F \text{ et pour tout } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemples

1. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. L'ensemble $F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

3. L'ensemble $F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

La notion de sous-espace vectoriel prend tout son intérêt avec le théorème suivant :
un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Exemple

Déduire que l'ensemble $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

11.3 Combinaisons linéaires

Définition. Soit $n \geq 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque. Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est **colinéaire** à v_1.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. En effet, ...

2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, le vecteur $u = (2, 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $v_1 = (1, 1)$. En effet, ...

Exercices

1. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de u et v.
2. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Montrons que $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de u et v.

Solutions :

11.4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie

Définition. Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ une famille de vecteurs de E. Soit W un sous-espace vectoriel de E.
On dit que $\mathcal{A}$ **engendre** W (ou bien W est **engendré** par $\mathcal{A}$) si pour tout $v \in W$, il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ tels que :

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p.$$

Ceci signifie que W est formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$.
On note

$$W =< \mathcal{A} >= \mathrm{vect}(\mathcal{A}) = \{v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq p\}.$$

Remarque. On a bien $\mathcal{A} \subset W$.

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $u = (1, 2) \in E$. Déterminer le sous-espace vectoriel W engendré par u.

2. Soient $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (1, 1)$. Montrer que $E = \mathrm{vect}\big(u_1, u_2\big)$.

3. Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $W = \mathrm{vect}(u, v)$.

11.5 Familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition. Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une **famille libre** ou **linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

implique que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \ldots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients NON TOUS NULS, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**.
Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une **relation de dépendance linéaire** entre les v_j.

Remarque. Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est liée si et seulement si au moins un vecteur de cette famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemples

Pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, déterminer si une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

1. Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 1)$.
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

2. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (2, 1, 0)$.
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

D'autres exemples

1. Les polynômes $P_1(X) = 1 - X$, $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ et $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ forment ils une famille libre ?

2. La famille $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ est-elle libre ?

3. La famille $\{e^x, e^{x+1}, e^{x+5}\}$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est elle une famille libre ?

Interprétation géométrique de la dépendance linéaire

- Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.
- Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.

11.6 Familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une **famille génératrice** de E si

$$E = \mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_p).$$

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E, \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \text{tq} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Tout vecteur de E est donc une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.
On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ **engendre** E (ou est un **système de générateurs** de E).

Remarque. Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = Vect(v_1, ..., v_p)$.

Remarque. Il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.

Exemples

1. Considérons les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$,$v_2 = (0,1,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$ de $E = \mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E.

2. Soient $v_1' = (2,1)$ et $v_2' = (1,1)$. Monter que $\{v_1', v_2'\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

3. Monter que $\{1, i\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$.

4. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.
   Alors la famille $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes ne possède pas de famille génératrice FINIE.

11.7 Bases et dimension

La notion de base généralise la notion de repère.
Dans $\mathbb{R}^2$, un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires.

Dans $\mathbb{R}^3$, un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires.
Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base.
Il en sera de même pour une base d'un espace vectoriel.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.
Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon **unique** comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.
Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **uniques** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Il existe plusieurs bases possibles pour le même espace vectoriel.

Exemples

1. Soient les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.

2. Soient les vecteurs $v_1 = (3,1)$ et $v_2 = (1,2)$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

3. De même dans $\mathbb{R}^3$, si $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, alors (e_1, e_2, e_3) forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$:
$$e_1 = (1,0,\dots,0) \quad e_2 = (0,1,\dots,0) \quad e_n = (0,\dots,0,1)$$
forment une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
5. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

11.7.1 Existence d'une base

Le théorème suivant nous donne l'existence d'une base.

Théorème. (**Existence d'une base**)
Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors il existe une base de E.

Théorème. Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Remarque. Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même **cardinal** (nombre de vecteurs qui forme une famille).

11.7.2 Dimension

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espcae vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs.
Le nombre de vecteurs qui forment une base de E s'appelle **dimension** de E et se note $\dim(E)$.
Si $E = \{0_E\}$ alors $\dim(E) = 0$.

Exemples

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, car sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ contient n éléments.
2. $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, son cardinal est égal à $n+1$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments.
3. Si $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ est une famille de **n** vecteurs de E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathcal{A}$ est une base de E,
   (ii) $\mathcal{A}$ est une famille libre de E,
   (iii) $\mathcal{A}$ est une famille génératrice de E.

Remarque. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_p)$ est une famille de p vecteurs de E.
Le théorème précédent nous permet de dire que :

— Si $p > n$ alors $\mathcal{A}$ est liée.
— Si $p < n$ alors $\mathcal{A}$ n'est pas génératrice de E.
— Si $p = n$ alors $\left(\mathcal{A} \text{ libre } \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ génératrice de E}\right)$

Ce théorème très important va être très utile pour résoudre certains exercices.
Par exemple, pour montrer que n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que ces vecteurs sont libres.

Exemples

1. La famille $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,-2)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. La famille $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,2,0), u_2 = (2,-1,1), u_3 = (1,1,-1)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

11.7.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$;
2. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $E = F$.

11.8 Théorème de la base incomplète

Théorème. (**Théorème de la base incomplète**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.
2. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Exemples

— **Comment compléter une famille libre en une base d'un espace vectoriel ?**
En rajoutant des vecteurs d'une autre base pour former une famille libre.
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = \{u_1 = (2,1,0), u_2 = (0,1,1)\}$. Compléter B en une base de E.

— **Comment extraire une base à partir d'une famille génératrice ?**
Il s'agit d'éliminer de la famille génératrice tous les vecteurs qui sont linéairement dépendants des autres.
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = \{u_1 = (1,0,2), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,3), u_4 = (1,2,1)\}$.
Sachant que B engendre E, trouver une base de E contenue dans B.

11.9 Bases échelonnées

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $F = textvect(v_1, v_2, ..., v_k)$ où $v_i \in E$.
Le sous-espace vectoriel F ne change pas si on effectue sur les vecteurs v_i un certain nombre d'opérations dites **élémentaires** qui sont :

— échanger deux vecteurs
— multiplier un des vecteurs par un scalaire non nul
— remplacer un des vecteurs v_i par $v_i - \lambda v_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

Si on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs v_i dans une matrice A, ces règles permettent d'appliquer la **méthode de pivot de Gauss** afin de trouver une base de F : on échelonne donc la matrice A en colonnes en faisant apparaître des 0 successivement sur les lignes des composantes des vecteurs dans une base donnée.

Théorème. (**Base échelonnée**)
Soit $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une famille de E, un espace vectoriel.
Soit $W = <\mathcal{A}>$ avec $\dim(W) = r \leq m,\ r > 0$.
Alors, par un nombre fini d'opérations élémentaires, $\mathcal{A}$ se transforme en

$$\mathcal{A}^{'} = \{v_1^{'}, v_2^{'}, ..., v_r^{'}, 0, 0, ..., 0\}$$

tels que $\{v_1^{'}, v_2^{'}, ..., v_r^{'}\}$ vérifie :

1. $\{v_1^{'}, v_2^{'}, ..., v_r^{'}\}$ est une base de W dite **base standard** ou **échelonnée**.
2. $v_j^{'} = (0, 0, ..., 0, 1, a_{k_{j+1}}, a_{k_{j+2}}, ..., a_m)$ où 1 se trouve à la $k_{jème}$ position.
3. $k_1 < k_2 < ... < k_r$.
4. $v_j^{'}$ est le seul vecteur de $\mathcal{A}^{'}$ qui a une composante non nulle dans la position k_j.

Exemple

Soient $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-2, -2)$, $v_3 = (1, 3)$ et $v_4 = (0, 3)$.
Donner une base de $F = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

Exercice

Soient $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$.
Montrer que $F = \mathbb{R}^3$ et donner une base échelonnée de F.

11.10 Exercices.

Exercice 11. 1. On considère les familles des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ avec $n = 3$ ou 4 :

$$\begin{aligned}
A &= \{a = (2,3,4),\ b = (-1,-5,-7),\ c = (3,1,1)\} \\
B &= \{a = (1,-1,i),\ b = (-1,i,1),\ c = (i,1,-1)\} \\
C &= \{a = (1,2,-1,0),\ b = (4,5,0,1),\ c = (2,1,2,1)\} \\
D &= \{a = (2,6,-3),\ b = (1,3,-2),\ c = (5,3,-2),\ d = (3,9,-5)\}
\end{aligned}$$

Indiquer lesquelles de ces familles sont libres, liées (on donnera les liaisons des vecteurs), génératrices, bases.

2. Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

$$A = \{1, X-1, (X+1)^2\} \quad (E = \mathbb{R}_2[X])$$

$$B = \{x \mapsto e^x, x \mapsto e^{x+1}, x \mapsto e^{x+2}\} \quad (E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}})$$

$$C = \{x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto x\} \quad (E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}})$$

Exercice 11. 2. Soit A la famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$A = \{u_1 = (1,1,0,1),\ u_2 = (2,1,3,1),\ u_3 = (1,1,0,0),\ u_4 = (0,1,-1,-1)\}.$$

Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^4$. Trouver les coordonnées du vecteur $u = (0,0,0,1)$ dans cette base.

Exercice 11. 3. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base.

$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ,\ 3x - y + t = 0\} \\
F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ,\ x - y + 2z + t = 1\} \\
G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ,\ x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\} \\
H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ,\ \mid x + t \mid = \mid y \mid\}
\end{aligned}$$

2. Soit $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11. 4. Sachant que A est une base de $\mathbb{R}^4$, compléter la famille des vecteurs B pour en faire une base de $\mathbb{R}^4$.
$A = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), (0,1,0,1)\}, B = \{(1,0,2,3), (0,1,-2,-3)\}$
$A = \{(1,0,0,0), (0,0,1,0), (5,1,11,0), (-4,0,-6,1)\}, B = \{(1,0,1,0), (0,2,0,3)\}$

Exercice 11. 5. Sachant que A engendre $\mathbb{R}^3$, en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.
$A = \{(2,6,-3), (5,15,-8), (3,9,-5), (1,3,-2), (5,3,-2)\}$
$A = \{(1,0,2), (0,1,1), (2,1,5), (1,1,3), (1,2,1)\}$
$A = \{(1,1,0), (2,2,0), (2,4,1), (5,9,2), (7,13,3), (1,2,1)\}$