Dérivation et intégration

Recueil d'exercices

A1 - S2

Année 2019/2020

Basma Jaffal

Bureau L511

basma.jaffal@devinci.fr

Feuille 1: Fonctions dérivables

- Le TD m'est beaucoup plus utile quand je l'ai préparé.
- C'est inutile de passer le TD à recopier.
- Il vaut mieux corriger moins d'exercices mais pouvoir tout comprendre.

Exercice 1. Donner le domaine dérivation des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées:

1. $f(x) = \sqrt{4+2x^2}$
2. $f(x) = \cos(\ln x)$
3. $f(x) = (\ln x)^3$
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$
6. $f(x) = (\cos x)^x$

Exercice 2. On considère la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) & = & x^2 \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & = & 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1?

Exercice 3. Calculer la dérivée d'ordre n de:

1. $f(x) = x^2 \sin x$
2. $g(x) = (x^3+1)e^{-x}$

Exercice 4.

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.
   (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.
   (b) Calculer $f^{(n)}(x)$.
2. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par
$$g(x) = x^{n-1}\ln(1+x), \ (n \in \mathbb{N}^\star).$$
3. Soit $h(x) = (x-a)^n(x-b)^n, \ (a, b \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^\star)$.
   (a) Calculer $h^{(n)}(x)$.

(b) En utilisant le cas $a = b$, en déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \notin [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$ passe par le point $(d, 0)$.

Exercice 6. Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f^{'}(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{'}(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$. (On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, si $x \in]a, b]$ et $g(a) = f^{'}(a)$).

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par:

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x + \dfrac{x \ln x}{1 - x} \quad \text{si } 0 < x < 1, \\ f(1) &= 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ telle que $f^{'}(c) = 0$ (on ne demande pas de trouver la valeur de c).

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 9. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Montrer que f est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Exercice 10. Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives et donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$:

1. $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = -1 + e^{x-1} + \ln x$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = 4x + \sin^4 x$

Exercice 11. 1. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.
f est-elle injective?

2. Soit $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1$.
   g est-elle bijective?

3. Soit h la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x$.

   (a) Comparer $[0, 1]$ et $h^{-1}\big(g([0, 1])\big)$. Comment pouvez-vous expliquer le résultat obtenu.

   (b) Déterminer $h(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Calculer

1. $\arccos(\cos \frac{2\pi}{3})$
2. $\arccos(\cos \frac{-2\pi}{3})$
3. $\arccos(\cos 4\pi)$
4. $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4})$

Exercice 13. Etablir que

1. $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$
2. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$
3. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes:

1. $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$
2. $\arccos x = \arcsin 2x$
3. $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$

Exercice 15. Simplifier les expressions suivantes:

1. $\cos(2 \arccos x)$
2. $\cos(2 \arcsin x)$
3. $\sin(2 \arccos x)$
4. $\cos(2 \arctan x)$
5. $\sin(2 \arctan x)$
6. $\cos^2(\frac{1}{2} \arccos x)$
7. $\sin^2(\frac{1}{2} \arccos x)$

Exercice 16. Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Feuille 2: Développements limités

- Le TD m'est beaucoup plus utile quand je l'ai préparé.
- C'est inutile de passer le TD à recopier.
- Il vaut mieux corriger moins d'exercices mais pouvoir tout comprendre.

Exercice 17. Déterminer les $DL(0, n)$ des fonctions suivantes et donner un équivalent simple de chacune d'elles au voisinage de 0.

1. $f_1(x) = e^x \cos(x)$, $n = 3$
2. $f_2(x) = (\ln(1+x))^2$, $n = 4$
3. $f_3(x) = e^x \sin(x)$, $n = 4$
4. $f_4(x) = \ln(\cos(x))$, $n = 6$
5. $f_5(x) = \sqrt{1+\tan(x)}$, $n = 3$
6. $f_6(x) = (\cos x)^{\sin x}$, $n = 4$
7. $f_7(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$, $n = 3$
8. $f_8(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 3$
9. $f_9(x) = \ln(1+\cos(x))$, $n = 4$

Exercice 18. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x)$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Donner le $DL(1, 3)$ de f.
2. En déduire l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (1, \frac{1}{2})$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 19. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^3}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{2}{x})\right)^x$
10. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2$

Exercice 20. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Trouver l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (2, f(2))$ et déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 21. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = x^2 e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - ex^3 \ln(1 + \frac{1}{x}).$$

Exercice 22. Déterminer les asymptotes éventuelles et la position de la courbe représentative par rapport à celles ci, des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
2. $f_2(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$
3. $f_3(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x}$
4. $f_4(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{x-1}}$

Feuille 3: Intégration et calcul de primitives

- Le TD m'est beaucoup plus utile quand je l'ai préparé.
- C'est inutile de passer le TD à recopier.
- Il vaut mieux corriger moins d'exercices mais pouvoir tout comprendre.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que:

1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
3. Si f est T-périodique alors $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Exercice 24. En utilisant dans chaque cas un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ t}{1+sin\ t}dt$
2. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3t+1}{(t+1)^2}dt$
4. $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t(1+ln^2\ t)}dt$
5. $\displaystyle\int_2^{e} \frac{1}{t\ ln^5\ t}dt$
6. $\displaystyle\int_2^{4} \frac{t}{t^2-2t+5}dt$
7. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}dt$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ t}{3-2cos\ 2t}dt$

Exercice 25. En utilisant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes:

1. $A(t) = \dfrac{t^3-t^2+3t-2}{t^2-t}$
2. $B(t) = \dfrac{t}{t^2-t+1}$
3. $C(t) = \dfrac{1}{t(t^2+1)}$
4. $D(t) = \dfrac{1}{t^4-t^2}$
5. $E(t) = \dfrac{t}{(t^2-4)^2}$
6. $F(t) = \dfrac{1}{t^4+1}$

Exercice 26. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_1^e t^n\ ln\ t\ dt$
2. $\int_0^1 (t^3+1)e^{2t}dt$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ sin\ 3t\ dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\ t\ dt$
5. $\int_0^1 ln(t^2+1)\ dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 t\ cos^4 t\ dt$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\ t + cos\ t}dt$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+sin\ t+cos\ t}dt$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{7+tan\ t}dt$

Exercice 27. Calculer les primitives suivantes:

1. $\int^x t\ \arctan(t)dt$
2. $\int^x e^t\cos(t)dt$
3. $\int^x \frac{t+1}{t^3-8}dt$
4. $\int^x \sin^8(t)\cos^3(t)dt$

Exercice 28. Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\ (t)}dt.$

1. Calculer I.
2. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\ (t)}{1+\sin\ (t)}dt.$

Exercice 29.

1. Montrer que
$$\int_x^{x^2} (\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t})dt$$
tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
Indication: Utiliser le fait que la fonction $g(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}$ est bornée au voisinage de 1.
2. En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Feuille 4: Equations différentielles

- Le TD m'est beaucoup plus utile quand je l'ai préparé.
- C'est inutile de passer le TD à recopier.
- Il vaut mieux corriger moins d'exercices mais pouvoir tout comprendre.

Exercice 30. Résoudre les équations différentielles suivantes:

1. $y' - 2y = 0,\ y' + 2y = t^2 - 2t + 3$
2. $ty' + y + \ln t = 0$
3. $(1 + t^2)y' + 4ty = 0$
4. $2ty' + y = t^n,\ n \in \mathbb{N}$
5. $(1 - t)y' + y = \dfrac{t-1}{t}$
6. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$
7. $y' + \cos t\ y - \sin t \cos t = 0$

Exercice 31. Résoudre les équations différentielles suivantes:

1. $y'' + y' - 6y = 1 - 8t - 30t^2$
2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
3. $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t$
4. $y'' - 4y' + 4y = t\text{ch } 2t$
5. $y'' - 4y' + y = t\cos 2t$
6. $2y'' + 2y' + y = te^{-t}$
7. $y'' + y' = (\cos t)^3$
8. $y'' - 2y' + y = te^t \sin t$
9. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$

Exercice 32. On considère l'équation:

$$y'' + 2y' + 4y = te^t \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associé à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie:

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

   (a) On pose $g(t) = f(e^t)$. Vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 33. En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle suivante:

$$x^2 y^{'} + y + y^2 = 0.$$

Exercice 34. En posant $z = y^2$, résoudre $y^{'} y + y^2 = \frac{1}{2} e^{-2x}$.

Exercice 35. Soit (E) l'équation différentielle suivante:

$$t y^{''} + 2(t+1) y^{'} + (t+2) y = 0.$$

En posant $z = xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.