Chapitre 5. Espaces vectoriels

Maths SUP

***OPTIMAL**PREPA*

Fiche de cours

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels

■ ***Définition.*** Soit E un ensemble non vide muni de deux lois notées + et $\cdot$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

– $(E, +)$ est un groupe commutatif *(i.e. si + est une loi de composition interne sur E, associative, commutative, admettant un élément neutre, et telle que tout élément de E soit inversible pour la loi +)*,

– $\cdot$ est une loi de composition externe sur E de domaine $\mathbb{K}$: $\forall u\in E$, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda\cdot u)\in E$,

– $$\forall (u, v)\in E^2, \forall(\lambda, \mu)\in\mathbb{K}^2, \begin{cases}\lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u + \lambda\cdot v\\ (\lambda+\mu)\cdot u = \lambda\cdot u + \mu\cdot u\\ (\lambda\mu)\cdot u = \lambda\cdot(\mu\cdot u)\\ 1\cdot u = u\end{cases}.$$

Exemples :

– $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ $(n\in\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– l'ensemble des fonctions (de classe C^n, $n\in\mathbb{N}$, de classe C^∞) de I dans $\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,

– l'ensemble des applications d'un ensemble non vide dans E (où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

– $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrée d'ordre de n à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. Espace vectoriel produit

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(E_i, +, \cdot)_{1\le i\le n}$ une famille de $\mathbb{K}$-espace vectoriels. On appelle espace vectoriel produit des espaces vectoriels $(E_i)_{1\le i\le n}$ l'ensemble $E = E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ muni des deux lois + et $\cdot$ définies par :

– $\forall (x, y)\in E^2 / x = (x_i)_{1\le i\le n}, y = (y_i)_{1\le i\le n}, x + y = (x_i + y_i)_{1\le i\le n}$,

– $\forall x\in E / x = (x_i)_{1\le i\le n}, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda\cdot x = (\lambda x_i)_{1\le i\le n}$.

3. Sous-espaces vectoriels

■ ***Définition.*** Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F\subset E$. F est un sous espace-vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si :

- $F\neq\varnothing$,
- F est stable pour + : $\forall (u, v)\in F^2$, $(u + v)\in F$,
- F est stable pour $\cdot$: $\forall(\lambda, u)\in\mathbb{K}\times F$, $(\lambda\cdot u)\in F$.

■ ***Propriétés.***

- Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$, alors (en notant encore + et $\cdot$ les restriction des lois + et $\cdot$ à F) : $(F, +, \cdot)$ est un

$\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$.

■ ***Définition.*** On appelle sous-espace engendré par A, et on note Vect (A), l'ensemble égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

■ ***Propriétés.***

• Vect (A) est un sous-espace vectoriel de E.

• Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors Vect $(A) \subset F$. On dit aussi que Vect (A) est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E engendré par A.

Dans la suite du cours, tout espace vectoriel de la forme $(E, +, \cdot)$ sera noté plus simplement E, comme c'est le cas par convention lorsqu'il n'y a pas d'ambuiguité sur la nature des lois de E.

II. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E et $u \in E$. On dit que u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ si $\exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

■ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$, noté $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Propriétés :

• Pour tout n-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$: $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

• Pour tout n-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_1 \neq 0$: $\text{Vect}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, u_2, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

• Si σ est une permutation de $[1, n]$, alors : $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})$.

III. Familles libres, familles génératrices, bases

■ ***Famille libre.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de E si :

$$\forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, n], \lambda_i = 0\right).$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est liée.

Propriété : une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. La réciproque est fausse.

■ ***Famille génératrice.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de E si et seulement si : $\forall u \in E, \exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, i.e. si et seulement si : $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

■ ***Base.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E si et seulement si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre et génératrice de E, donc si et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

IV. Base et dimension

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Théorème de la dimension

▪ ***Espaces vectoriels de dimension finie.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

▪ ***Existence de bases (théorème de la base extraite).*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ admettant une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Il existe alors une base de E constituée de vecteurs de $\mathcal{G}$.

▪ ***Théorème de la dimension.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ admettant une famille génératrice finie. Toutes les bases de E ont alors même longueur : la dimension de E, notée $\dim E$ (par convention, on a : $\dim\{0\} = 0$).

Résultats usuels :

- $\dim \mathbb{K}^n = n$,
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

▪ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $(f_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de F. Alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, une base de $E \times F$ est :
$\left(((e_i, 0_F))_{1\leq i\leq n}, ((0_E, f_j))_{1\leq j\leq p}\right)$, et : $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$.

2. Bases canoniques des espaces vectoriels usuels

▪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [1, n]$, on note e_i le vecteur à n coordonnées : $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 est placé en $i^{\text{ème}}$ position). La famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Tout vecteur $u = (\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ s'écrit alors : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(X^i)_{0\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Caractérisation d'une famille de vecteurs. Théorème la base incomplète

▪ ***Caractérisation d'une famille de vecteurs de E.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de p vecteurs de E.

– si la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille libre de E, alors $p \leq n$. Dans ces conditions, la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de E si et seulement si $p = n$,

– si la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de E, alors $p \geq n$. Dans ces conditions, la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de E si et seulement si $p = n$.

▪ ***Théorème de la base incomplète.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n admettant une famille génératrice $\mathcal{G}$ et $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre de p vecteurs de E. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ peut être complétée en une base de E par $n - p$ vecteurs de $\mathcal{G}$.

▪ ***Rang d'une famille de vecteurs.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de p vecteurs de E. On appelle rang de la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq p}$, la dimension de $\mathrm{Vect}\left((u_i)_{1\leq i\leq p}\right)$. C'est le nombre maximal de vecteurs de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ linéairement indépendants.

4. Dimension d'un sous-espace vectoriel

▪ Soient n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. F est de dimension finie, inférieure ou égale à n.

▪ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Exemples à connaître :

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, les droites passant par l'origine et $\mathbb{R}^2$.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites passant par l'origine, les plans passant par l'origine et $\mathbb{R}^3$.

5. Complément

■ ***Droite vectorielle.*** Si n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on appelle droite vectorielle de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1.

Conséquence : tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en forme un base.

■ ***Plan vectoriel.*** Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on appelle plan vectoriel de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

■ ***Hyperplan.*** Si n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension n - 1.

Conséquence : tout supplémentaire dans E d'un hyperplan de E est une droite vectorielle.

V. Sommes, sommes directes

1. Généralités

■ ***Somme.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. La somme des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ est :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} u_i,\ (u_i)_{1\le i\le p} \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \right\}.$$

$(F_1 + F_2 + \dots + F_p)$ est alors un sous-espace vectoriel de E.

■ ***Somme directe.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Les sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe si :

$$- \forall u \in \left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right), \exists!\,(u_i)_{1\le i\le p} \in (F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p),\ u = \sum_{i=1}^{p} u_i \qquad \text{ou :}$$

$$- \forall (u_i)_{1\le i\le p} \in (F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p),\ \left(\sum_{i=1}^{p} u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, p],\ u_i = 0\right).$$

Notation : si les sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\le i\le p}$ sont en somme directe, on écrit : $\sum_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

■ ***Caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe si, et seulement si : $F \cap G = \{0\}$.

Remarque : cette dernière propriété ne s'étend pas sous cette forme à p sous-espaces vectoriels en somme directe ($p \ge 3$).

2. Sommes, sommes directe en dimension finie

■ ***Formule de Grassmann.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies. Alors (F + G) est un espace vectoriel de dimension finie, et : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

■ ***Dimension d'une somme, caractérisation du caractère direct d'une somme à l'aide de la dimension.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies. On a l'inégalité : $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \le \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$. Il y a égalité si et seulement si les sous-espaces vectoriels F_i $(1 \le i \le p)$ sont en somme directe.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \le n$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_i)_{1\le i\le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies telle que $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = n$, $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$. S'il existe une partition $\{J_i / 1 \le i \le p\}$ de $[1, n]$ telle que : $\forall i \in [1, p],\ F_i = \mathrm{Vect}\left((e_k)_{k\in J_i}\right)$, alors les sous-espaces vectoriels F_i $(1 \le i \le p)$ sont en somme directe.

Réciproquement, si les sous-espaces vectoriels F_i $(1 \leq i \leq p)$ sont en somme directe, alors en juxtaposant les bases des $(F_i)_{1\leq i\leq p}$, on obtient une base de $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$.

$$\dim\left(\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i\,.$$

■ ***Base adaptée à un sous-espace.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}$ une base de F. On appelle base de E adaptée au sous-espace F, toute base de E obtenue en complétant la base $\mathcal{B}$ de F en une base de E à l'aide du théorème de la base incomplète.

■ ***Base adaptée à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies en somme directe, et pour tout entier i compris entre 1 et p, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i. En notant $\mathcal{B}$ la base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ obtenue en concaténant dans cet ordre les bases $\mathcal{B}_i$ $(1 \leq i \leq p)$, on appelle base de E adaptée à la décomposition en somme directe des espaces F_i $(1 \leq i \leq p)$, toute base de E obtenue en complétant la base $\mathcal{B}$ de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ en une base de E à l'aide du théorème de la base incomplète.

VI. Sous-espaces vectoriels supplémentaires (cas de deux sous-espaces vectoriels)

1. Généralités

■ ***Définition.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E :

– si $\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G,\ u = v + w$ ou, ce qui est équivalent :

– si $\begin{cases} \forall u \in E, \exists (v, w) \in F \times G,\ u = v + w \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$.

Notation : si F et G sont supplémentaires dans E, on écrit : $F \oplus G = E$.

Exemple : si P est un polynôme de degré n + 1, en notant $F = P(X)\mathbb{K}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ constitué des multiples de P, et $G = \mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n, alors F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

■ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire dans E, et F admet une infinité de supplémentaires dans E.

2. Sous-espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie

■ ***Caractérisation de deux sous-espaces supplémentaires.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si : $\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$.

■ Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire dans E. Si dim E = n et dim F = p, alors tous les supplémentaires de F dans E sont de même dimension n - p.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que p < n, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}\left((e_i)_{1\leq i\leq p}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left((e_i)_{p+1\leq i\leq n}\right)$ sont supplémentaires dans E.

Réciproquement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, en juxtaposant une base de F à une base de G, on obtient une base de E. On dit d'une telle base qu'elle est adaptée au sous-espace F.

Remarque : les définitions et caractérisations ci-dessus peuvent s'adapter à p espaces vectoriels supplémentaires dans E $(p \geq 3)$, mais ces extensions ne sont au programme qu'en maths spé.

VII. Matrices et vecteurs

■ ***Matrice représentant une famille finie de vecteurs.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\dim E = n$), $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $(u_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille de p vecteurs de E.

La matrice représentant la famille $(u_j)_{1\leq j\leq p}$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la matrice (n, p) dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j\in [1, p]$) sont les coordonnées de u_j dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

■ ***Matrice colonne.*** En particulier, un vecteur de E est représenté dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ par une matrice colonne à n lignes constituée des coordonnées de ce vecteur dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

■ ***Matrice de passage.*** Si $\mathcal{B}' = (e_i')_{1\leq i\leq n}$ est une autre base de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant la famille $(e_i')_{1\leq i\leq n}$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Propriétés : une matrice de passage est toujours inversible, et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

■ ***Formule de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur.*** Soient $u\in E$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, X la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$ et X' la matrice représentant u dans $\mathcal{B}'$. On a alors : $X = PX'$.

VIII. Matrices et espaces vectoriels

1. Structures $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$.

■ Soit $n\in \mathbb{N}^*$. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

2. Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

■ Soit n un entier naturel non nul. Les ensembles respectifs des matrices (n, n) triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, diagonales et symétriques forment des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(n, p)\in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i, j)\in [1, n] \times [1, p]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

X. Programme officiel

Hors programme :

- Familles de vecteurs indexées par un ensemble infini.
- Sous-espaces affines.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans le cas de p espaces, où $p > 2$.

A la limite du programme :

- Toute famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

N.B. : Les déterminants de vecteurs sont traités à part dans le chapitre "Déterminants".

Chapitre 5bis. Espaces affines

Maths SUP

***OPTIMAL**PREPA*

Fiche de cours (complément au chapitre 5)

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Translation

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

▪ ***Translation.*** Soit $a \in E$. On appelle translation de E de vecteur a l'application t_a définie sur E par : $\forall x \in E$, $t_a(x) = a + x$.

▪ ***Notations.***

- On note $\mathcal{T}(E)$, l'ensemble des translations de E.
- Si V est une partie de E, on note $a + V$, l'ensemble $t_a(V)$.

2. Sous-espace affine

▪ ***Sous-espace affine.*** Soient A une partie de E. On dit que A est un sous-espace affine de E si $A = \varnothing$ ou s'il existe un sous-espace vectoriel F et un élément $a \in E$ tel que : $A = a + F$.

▪ ***Direction.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A un sous-espace affine de E non vide, et $a \in A$. On appelle direction de A, le sous-espace vectoriel $\{x - a, x \in A\}$.

Remarque : la direction d'un sous-espace affine ne dépend pas du point a choisi.

▪ ***Plan affine, hyperplan affine.*** On appelle plan affine (resp. hyperplan affine) de E, un sous-espace affine dont la direction est un plan (resp. un hyperplan) de E.

3. Sous-espaces affines parallèles

▪ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces affines de E non vides de direction respectives F et G. On dit que A est parallèle à B si $F \subset G$.

▪ ***(Hors-programme)*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces affines de E non vides de direction respectives F et G. On dit que A et B sont parallèles si $F = G$.

Remarque : par convention, on dit que le sous-espace affine $\varnothing$ est parallèle à tout sous-espace affine.

4. Intersection de sous-espaces affines

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces affines de E non vides de direction respectives F et G, et $(a, b) \in A \times B$. On a :

- $A \cap B \neq \varnothing \iff (a - b) \in (F + G)$,
- Si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cap B$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$.

5. Exemples à connaître

▪ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de direction Ker u.

■ Soient (L) une équaiton différentielle linéaire à résoudre sur un intervalle I, (H) l'équation homogène associée, f_0 une solution particulière de (L) et S le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des solutions de (H) sur I. L'ensemble des solutions de (L) sur I est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des fonctions définies sur I, de direction S et de vecteur directeur f_0.

Hors programme :

- Applications affines.

Chapitre 5. Espaces vectoriels

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

Attention aux mauvais réflexes en algèbre : par exemple, si A et B sont deux matrices, on peut avoir l'égalité $AB = 0$ sans que l'une des matrices A et B soit nulle, et on n'a pas toujours $AB = BA$.

Plus généralement, sur un espace vectoriel quelconque, il faut faire attention à ne pas appliquer les propriétés usuelles des réels (comme, par exemple, la commutativité du produit, ...).

I. Montrer que (F, +, .) est un espace vectoriel

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut (le plus souvent) pas faire : revenir à la définition. En effet, outre le fait que revenir à la définition suppose la vérification d'une dizaine de propriétés (au demeurant pas très amusantes), le plus souvent, l'espace vectoriel considéré est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. L'utilisation de la définition sera donc réservé aux (très, très rares !) cas d'espace vectoriels originaux, qui ne seraienнt constitués ni de suites, ni de fonctions, ni de n-uplets, ni de matrices, ni de polynômes, ni d'applications linéaires, etc.

Ainsi, pour montrer que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, on peut montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ _l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ considéré étant soit un espace vectoriel figurant dans l'exercice, soit un espace vectoriel de référence faisant partie du cours : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{L}(A, B)$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$..._, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$: voir **point II.** ci-dessous.

II. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de (E, +, .)

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on peut :

– revenir à la définition en montrant que :

i) $F \subset E$,

ii) $F \neq \emptyset$ (en général, on prouve que le vecteur nul de E appartient à F),

iii) F est stable par l'addition interne de E et par la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$.

– montrer que tout élément de F s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de E, i.e. que F est un "***Vect***" d'une famille d'éléments de E : F est alors directement un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$,

– montrer que F est le noyau d'une application linéaire définie sur E, ou l'image d'une application linéaire à valeurs dans E : F est alors directement un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ (voir le chapitre "**Applications linéaires**").

Les deux dernières méthodes étant plus rapides que la première, il vaut mieux essayer de s'y ramener lorsque c'est possible. Par exemple, si l'on veut montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, on peut bien sûr revenir à la définition, mais il est plus rapide de remarquer que : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM = M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM - M = 0\}$, et donc que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $M \mapsto {}^tM - M$: la démonstration est alors bien plus rapide.

☞ Voir les exercices : "Rang d'une famille de vecteurs", "Propriétés des sous-espaces vectoriels", "Bases et dimension", "Etude d'un espace vectoriel de matrices".

Dans la suite de la fiche méthde, on notera plus simplement E, un espace vectoriel (E, +, •), comme cela est usuel lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois considérées.

III. Montrer l'inclusion, l'égalité de deux espaces vectoriels

1. Montrer que $E \subset F$

Pour montrer qu'un espace vectoriel E est inclus dans un espace vectoriel F, il suffit de montrer que tout élément de E appartient également à F, i.e. : $\forall x \in E, x \in F$.

☞ Voir l'exercice : "Propriétés des sous-espaces vectoriels".

2. Montrer que $E = F$

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F sont égaux, on peut :

– montrer que : $E \subset F$ et que $F \subset E$ en appliquant la méthode précédente,

– si E et F sont de dimensions finies, montrer que : $E \subset F$ ou que $F \subset E$, puis que : $\dim E = \dim F$ (méthode très courante et généralement plus rapide que la méthode précédente).

☞ Voir le chapitre "**Applications linéaires**".

IV. Montrer que des espaces vectoriels sont en somme directe / sont supplémentaires dans E

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : confondre les expressions "espaces vectoriels en somme directe" et "sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E".

Deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe peuvent très bien ne pas être supplémentaires dans E. Par exemple, deux droites vectorielles D_1 et D_2 de $\mathbb{R}^3$ non parallèles sont en somme directe : on a donc bien $D_1 + D_2 = D_1 \oplus D_2$; mais on n'a pas : $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^3$ (les deux droites définissant un plan et non pas l'ensemble $\mathbb{R}^3$ en entier). Les droites D_1 et D_2 ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

En revanche, deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E sont toujours en somme directe, mais le fait qu'ils soient en somme directe n'est pas suffisant comme le montre le contre-exemple ci-dessus ; voir également point **2.** ci-dessous.

1. Montrer que deux espaces vectoriels F et G sont en somme directe

Pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont en somme directe (i.e. que $F + G = F \oplus G$) on peut :

– revenir à la définition (rare) : montrer que tout vecteur de $E + F$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F,

– montrer que leur intersection est $\{0\}$.

☞ Voir l'exercice : "Sous-espaces vectoriels supplémentaires".

2. Montrer que deux espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E

Pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E (i.e. que $F \oplus G = E$), il faut tout d'abord s'assurer (et généralement, montrer) que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. On peut ensuite :

– si E est de dimension finie et connue, montrer que F et G sont en somme directe et que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E,

– revenir à la définition : montrer (la plupart du temps par analyse-synthèse, voir le chapitre "**Préliminaires**") que tout vecteur de E se décompose **de façon unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

– montrer que E et F sont en somme directe et que : $E = F + G$. Comme on a toujours : $F + G \subset E$ (car F est G sont des sous-espaces vectoriels de E), l'égalité : $E = F + G$ revient en fait à montrer que : $E \subset F + G$, i.e. que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Remarque : cette dernière méthode suppose d'avoir préalablement "l'idée" de la décomposition en question. En effet : lorsque l'on n'a pas "l'idée" de cette décomposition, on va assez logiquement procéder par analyse-synthèse pour la "trouver" : mais on va alors montrer l'unicité de la décomposition ! et en réalité, se ramener à la méthode ci-dessus qui consiste à revenir à la définition. Aussi, il est inutile de commencer par montrer que F et G sont en somme directe dans ce cas. Cette dernière méthode est donc à réserver aux cas où la décomposition est déjà connue (soit parce que l'on a déjà fait l'exercice, soit parce que l'on a une bonne idée, soit parce que la décomposition apparaît dans l'énoncé).

Enfin, dans certains cas on peut également (cf. chapitre "**Applications linéaires**") :

– exhiber un projecteur p de E tel que $F = \mathrm{Ker}\, p$ et $G = \mathrm{Im}\, p$, et utiliser ensuite la propriété $\mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$ (valable pour les projecteurs),

– exhiber une symétrie s de E telle que $F = \mathrm{Ker}\,(p - id)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(p + id)$, et utiliser ensuite la propriété $\mathrm{Ker}\,(p - id) \oplus \mathrm{Ker}\,(p + id) = E$ (valable pour les symétries). Cette propriété peut notamment être utilisée lorsqu'un des sous-espaces vectoriels peut s'interpréter comme l'ensemble des éléments invariants d'une symétrie (application linéaire involutive), comme par exemple l'ensemble des matrices symétriques réelles (ensemble des éléments invariants par la symétrie $s : A \mapsto {}^tA$, cf. chapitre "**Système linéaire et calcul matriciel**").

☞ Voir l'exercice : "Sous-espaces vectoriels supplémentaires".

3. Montrer que p espaces vectoriels F_1, F_2 et ... F_p sont en somme directe ($p \geq 3$)

Pour montrer que p espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont en somme directe (i.e. que $\sum_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$), on peut :

– revenir à la définition : montrer que tout vecteur de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots$ et F_p,

– utiliser la caractérisation de p sous-espaces vectoriels en somme directe (**hors-programme en première année**) en montrant que : $\forall i \in [1, p], F_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} F_j = \{0\}$.

4. Montrer que p espaces vectoriels F_1, F_2 et ... F_p sont supplémentaires dans E ($p \geq 3$) (hors-programme en première année)

Pour montrer que p espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont supplémentaires dans E (i.e. que $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$), il faut tout d'abord s'assurer (et généralement, montrer) que $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont des sous-espaces vectoriels de E. On peut ensuite :

– si E est de dimension finie et connue, montrer que $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont en somme directe et que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E,

– revenir à la définition : montrer (la plupart du temps par analyse-synthèse, voir le chapitre "**Préliminaires**") que tout vecteur de E se décompose **de façon unique** comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots$ et F_p,

– montrer que $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont en somme directe et que : $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$. Comme on a toujours : $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset E$ (car $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont des sous-espaces vectoriels de E), l'égalité : $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$ revient en fait à montrer que : $E \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$, i.e. que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots$ et F_p.

Remarque : cette dernière méthode suppose d'avoir préalablement "l'idée" de la décomposition en question. En effet : lorsque l'on n'a pas "l'idée" de cette décomposition, on va assez logiquement procéder par analyse-synthèse pour la "trouver" : mais on va alors montrer l'unicité de la décomposition ! et en réalité, se ramener à la méthode ci-dessus qui consiste à revenir à la définition. Aussi, il est inutile de commencer par montrer que $F_1, F_2, \dots$ et F_p sont en somme directe dans ce cas. Cette dernière méthode est donc à réserver aux cas où la décomposition est déjà connue (soit parce que l'on a déjà fait l'exercice, soit parce que l'on a une bonne idée, soit parce que la décomposition apparaît dans l'énoncé).

☞ Voir la fiche de cours.

5. Compléments

Se souvenir qu'un sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire dans E. Se souvenir également qu'un sous-espace vectoriel F de E admet une infinité de supplémentaires dans E (**à la limite du programme** en première année, démonstration à connaître) : il n'y a donc pas un unique sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

☞ Voir la fiche de cours.

V. Montrer qu'une famlle est libre, génératrice ou constitue une base d'un espace vectoriel

Se souvenir qu'un espace vectoriel de dimension finie admet une infinité de familles libres, de familles génératrices et de bases. Eviter donc des phrases commençant par : « la base de E est ... », etc.

1. Montrer qu'une famille est libre dans E

Commençons tout d'abord par préciser que pour montrer qu'une famille de vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre dans E, il faut d'abord s'assurer que cette famille est constituée de vecteurs de E. Cette vérification est en général très rapide, mais il faut la faire.

a. A l'aide de la définition

Pour montrer qu'une famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de vecteurs de E est libre, on utilise, en général, la définition (en raisonnant par implications). Cependant, dans la résolution de l'équation $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$, il est fréquent de :

– raisonner par récurrence, en effectuant une récurrence finie sur l'indice de sommation i,

– raisonner par l'absurde : en supposant un coefficient nul parmi les λ_i ($1 \leq i \leq p$), aboutir à une contradiction

– s'il s'agit de fonctions, dériver, intégrer, utiliser la continuité, la dérivabilité ou considérer la relation pour certaines valeurs particulières de x (0, 1, ...) ou effectuer un passage à la limite en un point ou en plus ou moins l'infini,

– s'il s'agit de suites, considérer la relation pour certaines valeurs particulières de n (0, 1, ...) ou en faisant un passage à la limite éventuelle lorsque n tend vers l'infini, et former ainsi un système (que l'on pourra interpréter sous forme matricielle, cherchant alors à prouver que la matrice considérée est inversible : voir le chapitre "**Systèmes linéaire et calcul matriciel**"),

– s'il s'agit de polynômes, étudier leurs racines éventuelles, sans oublier que pour utiliser l'ordre de multiplicité k ($k \geq 1$) d'une racine, on peut s'intéresser aux racines des polynômes P, P', ..., $P^{(k-1)}$ (voir la fiche méthodologique "**Polynômes**").

b. A l'aide d'autres méthodes

Pour montrer qu'une famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de vecteurs de E est libre, on peut également :

– raisonner par récurrence sur p (ce qui n'est pas la même chose que d'effectuer, dans le cadre de la méthode consistant à utiliser la définition pour p fixé, une récurrence sur l'indice de sommation),

– montrer que ces vecteurs appartiennent à une base de E (si E est de dimension finie),

– montrer qu'il s'agit d'une famille extraite d'une famille libre,

– s'il s'agit de **deux** vecteurs, raisonner par l'absurde, en supposant qu'ils sont colinéaires.

– s'il s'agit d'une famille de polynômes, montrer qu'ils sont de degrés deux à deux distincts (attention, la réciproque est fausse : une famille de polynômes de même degré peut être libre, comme le montre l'exemple des polynômes de Lagrange),

– montrer qu'il s'agit d'une famille de vecteurs propres asssociés à des valeurs propres deux à deux distinctes (hors-programme en première année, voir chapitre "**Diagonalisation**").

2. Montrer qu'une famille est liée

Pour montrer qu'une famille $(e_i)_{1\le i\le p}$ de vecteurs de E est liée, on peut :

– montrer qu'elle n'est pas libre, en montrant que l'équation $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ admet une solution non triviale,

– montrer qu'elle admet plus de vecteurs que la dimension de E (si E est de dimension finie),

– s'il s'agit d'une famille de **deux** vecteurs, montrer qu'ils sont colinéaires (attention : dans le cas général, dire qu'une famille est liée ne signifie pas nécessairement qu'il existe deux vecteurs colinéaires dans cette famille).

3. Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie

Pour montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice de E, on peut :

– prouver que certains de ces vecteurs forment une base de E,

– se ramener à la définition et montrer que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille,

– montrer que cette famille est l'image d'une famille génératrice d'un certain espace vectoriel F par une certaine application linéaire surjective de F dans E (voir chapitre "**Applications linéaires**").

4. Montrer qu'une famille constitue une base de E (si E est de dimension finie)

Pour montrer qu'une famille de vecteurs constitue une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, on peut, après avoir montré qu'il s'agit d'une famille de vecteurs de E :

– montrer que cette famille est libre et génératrice de E,

– montrer que cette famille est libre et maximale dans E (i.e. que le nombre de vecteurs qu'elle comporte est égal à la dimension de E) (ce qui suppose que l'on connaisse cette dimension),

– montrer que cette famille est génératrice de E et minimale dans E (ce qui suppose que l'on connaisse cette dimension),

– se ramener à la définition en montrant que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille,

– montrer que cette famille est la réunion de bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E,

– montrer que cette famille est l'image d'une base d'un certain espace vectoriel F par un certain isomorphisme de F dans E (un isomorphisme de deux espaces vectoriels de dimension finie transforme en effet toute base de l'espace de départ en une base de l'ensemble d'arrivée, voir chapitre "**Applications linéaires**"),

– si E est une droite vectorielle (i.e. un espace vectoriel de dimension 1), se souvenir que tout vecteur non nul de E en forme une base.

☞ Voir les exercices : "Bases de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^3$", "Bases de $\mathbb{R}_n[X]$", "Polynômes de Lagrange", "Espaces vectoriels définis à l'aide d'équations cartésiennes", "Formule de Grassman".

VI. Déterminer une base d'un espace vectoriel E de dimension finie

Rappel : se souvenir qu'un espace vectoriel de dimension finie admet une infinité de familles libres, de familles génératrices et de bases. Eviter donc des phrases commençant par : « la base de E est ... », etc.

Pour déterminer une base d'un espace vectoriel E de dimenson finie, on peut :

– si l'on connaît déjà une famille génératrice de E (ce qui est le cas, par exemple, lorsque E s'écrit comme *Vect*(...), et donc, notamment, pour les sous-espaces vectoriels de la forme Im f, où f est une application linéaire à valeurs dans E, voir chapitre "**Applications linéaires**"), rechercher si la famille est libre, puis, si ce n'est pas le cas, retirer un vecteur s'exprimant comme combinaison linéaire des autres, et continuer ainsi jusqu'à obtenir une famille libre de E : on obtient ainsi une base de E,

– lorsque E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel F, considérer un élément quelconque x de F, puis regarder à quelle condition nécessaire et suffisante x est élément de E. On se ramène généralement à un système, qu'il faut alors s'efforcer de résoudre de la façon la plus précise possible, en prenant soin d'exprimer toute information de la forme "tel vecteur appartient à tel ensemble" à l'aide d'une base de cet ensemble,

– considérer une famille libre d'éléments de E, puis la compléter en une base à l'aide du théorème de la base incomplète.

☞ Voir les exercices : "Bases et dimension", "Espaces vectoriels définis à l'aide d'équations cartésiennes", "Formule de Grassman".

VII. Déterminer la dimension d'un espace vectoriel E

1. En déterminant une base de E

Se souvenir que, si l'on connaît une base de E, alors la dimension de E est égale au nombre de vecteurs dans cette base (voir points **V.4** et **VI** ci-dessus).

☞ Voir les exercices : "Rang d'une famille de vecteurs", "Bases et dimension", "Espaces vectoriels définis à l'aide d'équations cartésiennes", "Formule de Grassman".

2. En le comparant à un autre espace vectoriel

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel E, on peut montrer qu'il existe un espace vectoriel F de dimension finie et une bijection de E sur F ou de F sur E puis appliquer la formule du rang à f si f est définie sur F, à f^{-1} si f est définie sur E.

V. Déterminer la matrice de passage d'une base de E à une autre base de E

Se souvenir que la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ de E à la base $\mathcal{B}'$ de E est obtenue en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. P^{-1} est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Penser que, si un même vecteur x de E est représenté par la matrice X dans la base $\mathcal{B}$ et par la matrice X' dans la base $\mathcal{B}'$, on a alors : $X = PX'$.

Penser que toute matrice de passage est inversible.