∽ Baccalauréat Centres étrangers Groupe 1 [1] - 13 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 QCM **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}.$$

Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

b. converge vers $\dfrac{2}{5}$

c. converge vers 0

d. converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Question 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x \ln x$.

b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

c. $f'(x) = 2$.

d. $f'(x) = x$.

Question 3 :

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	0	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :

a. H est positive sur $]-\infty~;~0]$.

b. H est croissante sur $]-\infty~;~1]$.

c. H est négative sur $]-\infty~;~1]$.

d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Groupe 1 (A) : Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Ghana, Guinée, Mali, Mauritanie, Sénégal et Togo.
Groupe 1 (B) : Algérie, Angola, Bénin, Cameroun, Congo, Gabon, Irlande, Niger, Nigeria, Portugal, République centrafricaine, République démocratique du Congo, Royaume-Uni, Tchad et Tunisie.
Groupe 1 (C) : Belgique – Danemark – Égypte – Guinée équatoriale – Luxembourg – Norvège – Pays-Bas - Suède.
Centres étrangers du groupe 1 (D) : Afrique du Sud – Arabie saoudite – Bahreïn – Burundi - Comores – Djibouti - Éthiopie – Jordanie – Kenya – Koweït – Madagascar – Mozambique - Qatar.
Groupe 1 (E) : Émirats arabes unis, Iran, République de Maurice.

Question 4 :

Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0,001$ est :

a.
```
def racine(a, b) :
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

b.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

c.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

d.
```
def racine (a, b) :
    while abs (b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

Question 5 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \dfrac{3}{10}$

b. $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

c. $\dbinom{10}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

d. $\dbinom{3}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

EXERCICE 2 — 6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

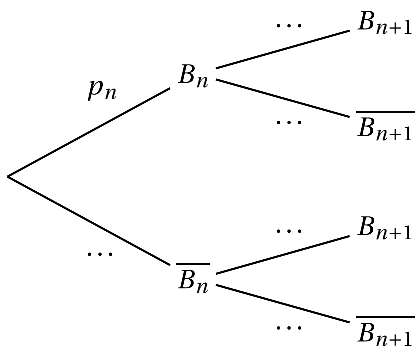
On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;

— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
   b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Partie B

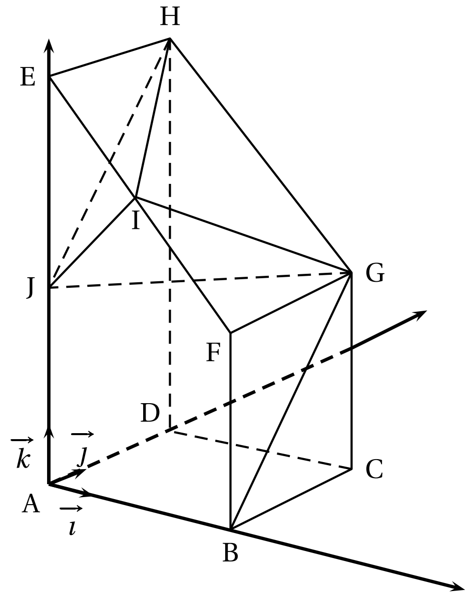
Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

— l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 **6 points**



On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   - **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   - **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\ \frac{4}{3}\,;\ \frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 4 **3 points**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».