∽ Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 ∾

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.
On dispose des données suivantes :

- 20 % des voitures sont sous garantie ;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire ;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les évènements suivants :

- G : « la voiture est sous garantie » ;
- R : « une réparation est nécessaire ».

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.
   c. Justifier que $P(R) = 0{,}082$.
   d. Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.
   L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :
   - si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;
   - si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.

   Sachant que son parc automobile compte 2 500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?
   On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours).
La directrice de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

1. En supposant que l'affirmation de la directrice est correcte, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.
2. Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?

Partie C

On modélise le nombre de kilomètres parcourus par les clients louant une voiture pour une semaine par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance $\mu = 450$ et d'écart-type $\sigma = 100$.

1. Quelle est la probabilité que le client louant la voiture pour une semaine roule entre 500 km et 600 km ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. La société de location souhaite faire une offre promotionnelle aux 15 % de ses clients parcourant le moins de kilomètres en une semaine.
   En-dessous de quel kilométrage hebdomadaire, arrondi à l'unité, un client sera-t-il concerné par cette offre ?

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

1. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$.
2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{x-4}.$$

   Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué 1 *point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*
Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z\left(z^2-8z+32\right)=0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z-3|=|z+3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n=\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui sont : $-\dfrac{\pi}{4}$; 0 ; $\dfrac{\pi}{4}$ et π.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
   Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.