Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2019

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

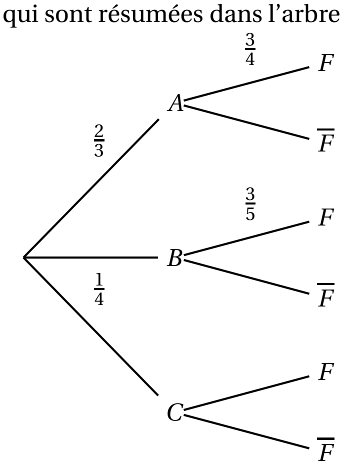
Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.

On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.

b. Calculer $P\left(B \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à $0,6$. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0,675$.

a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à $0,3$.

b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.

Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Partie B

1. La masse, en gramme, d'un panier de grande taille peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart- type 420. Un panier de grande taille est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à $4,5$ kg.

   On choisit au hasard un panier de grande taille.

   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit non conforme ?

2. Les responsables de l'association décident de modifier la méthode de remplissage. Avec cette nouvelle méthode, la masse, en gramme, d'un panier de grande taille est désormais modélisée par une variable aléatoire, notée Y, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart-type σ. La probabilité qu'un panier de grande taille choisi au hasard soit non conforme est alors de $0,04$.

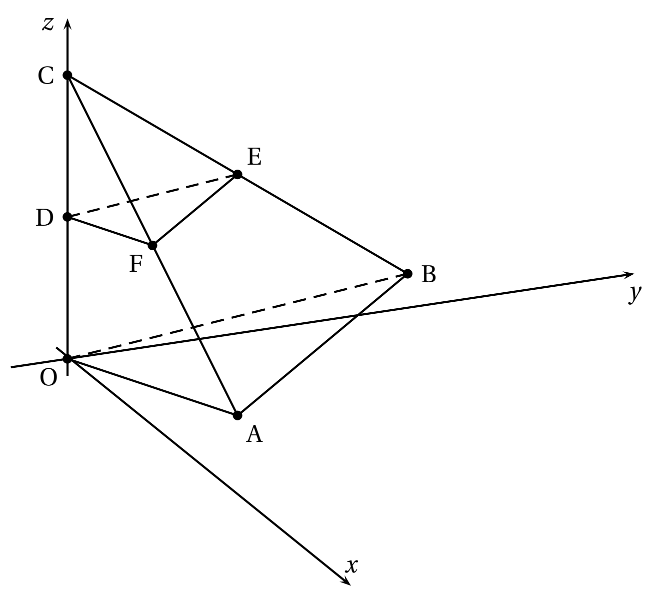
   Déterminer la valeur de σ arrondie à l'unité.

Partie C

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.
Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits.
Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste. à l'appui de son propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits.
La contestation de l'auditeur est-elle fondée ?

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(10 ; 0 ; 1), B(1 ; 7 ; 1) et C(0 ; 0 ; 5).



1. **a.** Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

   b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$, arrondie au dixième.

2. Vérifier que $7x+9y-70z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).
4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (OAB) passant par D.
5. Le plan P coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
   Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}~;~\frac{7}{2}~;~3\right)$.
6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

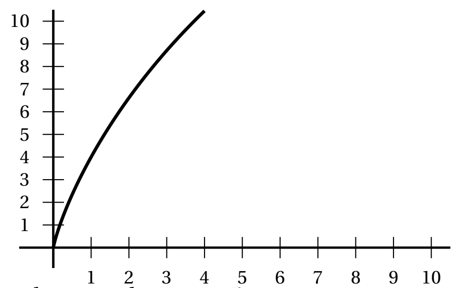
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. **a.** On rappelle que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

   En déduire que

$$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0.$$

   b. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
3. On désigne par G la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x).$$

   On admet que la fonction G est dérivable sur $]0~;~+\infty[$.

a. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite $\left(p_n\right)$ définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

Affirmation 1 : La suite $\left(p_n\right)$ est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $U_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2\, w_n \leqslant n^2 + n.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $\quad i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède deux ports maritimes :

- un port de plaisance A ;
- un port de commerce B.

Le port de plaisance A n'a pas d'accès direct à l'océan mais est relié au port de commerce B qui, lui, est ouvert sur l'océan. Un passant, installé en terrasse sur le port de plaisance A, jette une bouteille dans l'eau.

À l'instant 0, la bouteille se trouve dans le port A.

Soit n un entier naturel.

On admet que :

- quand la bouteille est dans le port A au bout de n heures, la probabilité qu'elle y soit encore l'heure suivante est $\frac{3}{5}$;
- quand la bouteille est dans le port B au bout de n heures, la probabilité qu'elle soit dans le port A l'heure suivante est $\frac{1}{10}$ et la probabilité qu'elle se trouve toujours dans le port B l'heure suivante est $\frac{1}{15}$;
- le port A n'ayant pas d'accès direct à l'océan, lorsque la bouteille est dans le port A, elle ne peut pas se trouver dans l'océan l'heure suivante ;
- une fois dans l'océan, la bouteille ne revient jamais dans les ports.

Soient les évènements :

- A_n : « la bouteille se trouve dans le port A au bout de n heures » ;
- B_n : « la bouteille se trouve dans le port B au bout de n heures » ;
- C_n : « la bouteille se trouve dans l'océan au bout de n heures ».

On note $a_n,\ b_n$ et c_n les probabilités respectives de ces évènements.

Ainsi on a $a_0 = 1,\ b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Compléter l'arbre fourni en **ANNEXE** à rendre avec la copie.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{15}b_n \end{array}\right.$$

   Soient les matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

   c. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, $U_n = M^n U_0$.

2. **a.** Donner U_0.

b. Calculer M^2 en détaillant les calculs de l'un des coefficients et en déduire qu'il existe un réel k tel que $M^2 = kM$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$M^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M.$$

d. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Soit n un entier strictement positif.

a. Démontrer que la probabilité que la bouteille soit dans l'océan au bout de n heures est égale à $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
n ← 1
Tant que 1 − (2/3)^(n−1) < 0,9
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

Indiquer sans justification le nombre contenu dans la variable n de cet algorithme à la fin de son exécution.

Interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité