Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Liban 29 mai 2018 ∾

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02\ \text{s}^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.
Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   a. Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
   b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.
   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1+\text{i}$ et $1-\text{i}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose

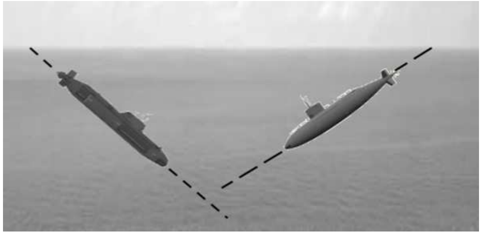
$$S_n = (1+\text{i})^n + (1-\text{i})^n.$$

   a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.
   b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant laréponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.
   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats



L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée. On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.

À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.

Le plan défini par $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

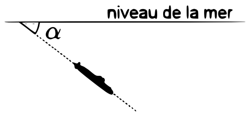
$$\left\{\begin{array}{rcr} x(t) & = & 140-60t \\ y(t) & = & 105-90t \\ z(t) & = & -170-30t \end{array}\right.$$

a. Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.

b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.



2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.

À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

EXERCICE 4 **5 points**

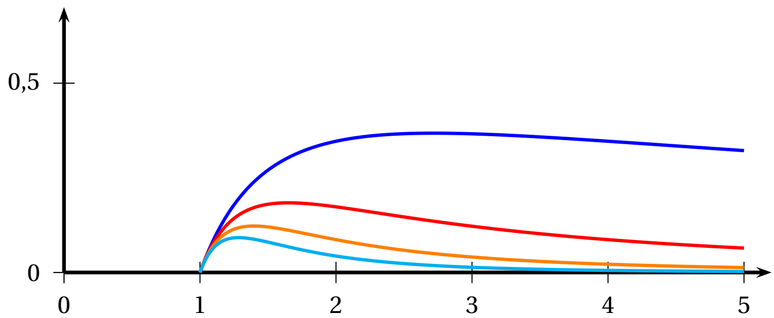
Commun à tous les candidats

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5J par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut -on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite $\left(p_n\right)$ converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 2 à n :
    C ← A + B
    A ← ...
    B ← ...
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4.

Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

b. En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.

c. Soit p un entier naturel non nul.

Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

b. On peut calculer $a_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$.

Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a. ?