

⌘ Baccalauréat S Antilles-Guyane ⌘
7 septembre 2017

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p .

Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

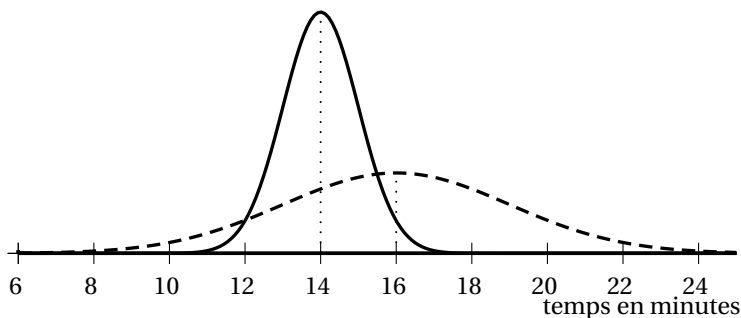
3. On constate que dans 67,5% des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
 - a. Calculer la valeur de p .
 - b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_V les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C .



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4} .
3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X , suivant une loi exponentielle de paramètre λ , réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

1. Soit b un réel positif.
Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
 - a. En déduire la valeur exacte de λ .
 - b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

Exercice 2

3 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 &= 100 \\ z_{n+1} &= \frac{i}{3} z_n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points O , M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r , où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leq r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]1 ; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale.
- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \, dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
- Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

- En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 1; 14)$, $B(0; 1; 8)$ et $C(-2; 2; 4)$ ainsi que le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
 - Démontrer que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
 - Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - z = 0$.
- On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - \frac{1}{2} \\ z = 4t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Donner un vecteur directeur de la droite Δ .
 - La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants?
- Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).

Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. Soit p un entier relatif donné.
 On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p)

$$3x + 4y = p$$

où $(x; y)$ est un couple d'entiers relatifs.

- a. Vérifier que le couple $(-p; p)$ est une solution particulière de l'équation.
- b. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p + 4k; p - 3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 On considère le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$ qui appartient au plan \mathcal{P} et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.
 - a. Démontrer que z_0 est pair.
 - b. On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif.
 Prouver que le couple $(x_0; y_0)$ est solution de l'équation (E_p) .
 - c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan \mathcal{P} à coordonnées entières.
3. À tout point M de coordonnées $(x; y; z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$.
- b. En déduire que si le point M est un point du plan \mathcal{P} , alors le point M' est aussi un point du plan \mathcal{P} .
- c. Soit Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{P} passant par O .
 Montrer que si le point M appartient à Δ , alors le point M' appartient aussi à Δ .