

Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

∞ **Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie** ∞  
**mars 2016**

**EXERCICE 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties A et B sont indépendantes*

**Partie A**

Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées. Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.

On tire au hasard une médaille de la boîte. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
  - a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
  - b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à  $\frac{21}{40}$ .
  - c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?
2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

**Partie B**

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

On dispose de deux machines  $M_1$  et  $M_2$  pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine  $M_1$  produit des médailles dont la masse  $X$  en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note  $C$  l'évènement « la médaille est conforme ».

Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine  $M_1$  ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$  près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine  $M_1$  étant jugée trop importante, on utilise une machine  $M_2$  qui produit des médailles dont la masse  $Y$  en grammes suit la loi normale d'espérance  $\mu = 10$  et d'écart-type  $\sigma$ .

- Soit  $Z$  la variable aléatoire égale à  $\frac{Y-10}{\sigma}$ . Quelle est la loi suivie par la variable  $Z$ ?
- Sachant que cette machine produit 6% de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de  $\sigma$ .

**EXERCICE 2****3 points****Commun à tous les candidats**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0; 16]$  par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

Ces courbes sont données en **annexe 1**.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère pour tout réel  $m$ , le plan  $P_m$  d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  le point  $A(1; 1; 1)$  appartient-il au plan  $P_m$ ?
- Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_{-4}$  sont sécants selon la droite  $(d)$  de représentation paramétrique

$$(d) \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- Montrer que l'intersection entre  $P_0$  et  $(d)$  est un point noté  $B$  dont on déterminera les coordonnées.
  - Justifier que pour tout réel  $m$ , le point  $B$  appartient au plan  $P_m$ .
  - Montrer que le point  $B$  est l'unique point appartenant à  $P_m$  pour tout réel  $m$ .
- Dans cette question, on considère deux entiers relatifs  $m$  et  $m'$  tels que

$$-10 \leq m \leq 10 \quad \text{et} \quad -10 \leq m' \leq 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de  $m$  et de  $m'$  pour lesquelles  $P_m$  et  $P_{m'}$  sont perpendiculaires.

- Vérifier que  $P_1$  et  $P_{-4}$  sont perpendiculaires.
- Montrer que les plans  $P_m$  et  $P_{m'}$  sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

- On donne l'algorithme suivant :

Variables :  $m$  et  $m'$  entiers relatifs  
 Traitement : Pour  $m$  allant de  $-10$  à  $10$  :  
                   Pour  $m'$  allant de  $-10$  à  $10$  :  
                           Si  $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$   
                               Alors Afficher  $(m ; m')$   
                           Fin du Pour  
                   Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

- d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont  $(-4 ; 1)$ ,  $(0 ; 1)$  et  $(5 ; -4)$ .  
 Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

#### EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes  $z_n$  définis, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  de l'annexe 2. L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points  $A_n$ .

1. a. Vérifier que  $1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$ .  
 b. En déduire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

- b. Pour quelles valeurs de  $n$ , les points  $O$ ,  $A_0$  et  $A_n$  sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ .  
 a. Interpréter géométriquement  $d_n$ .  
 b. Calculer  $d_0$ .  
 c. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n).$$

- d. En déduire que la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  est géométrique puis que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_n$ .
- c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point  $A_5$  sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
- d. Justifier cette construction.

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante***Partie A**

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Soit  $x$  le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste  $y$  de la division euclidienne de  $7x + 5$  par 26, puis on en déduit la lettre associée à  $y$  (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple :

M correspond à  $x = 12$ 

$$7 \times 12 + 5 = 89$$

Or  $89 \equiv 11 \pmod{26}$  et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. **a.** Soit  $k$  un entier relatif. Montrer que si  $k \equiv 7x \pmod{26}$  alors  $15k \equiv x \pmod{26}$ .  
**b.** Démontrer la réciproque de l'implication précédente.  
**c.** En déduire que  $y \equiv 7x + 5 \pmod{26}$  équivaut à  $x \equiv 15y + 3 \pmod{26}$ .
3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

**Partie B**On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $a_0$  et  $b_0$  sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 7a_n + 5$  et  $b_{n+1} = 15b_n + 3$ .Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$ .On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}.$$

**Partie C**

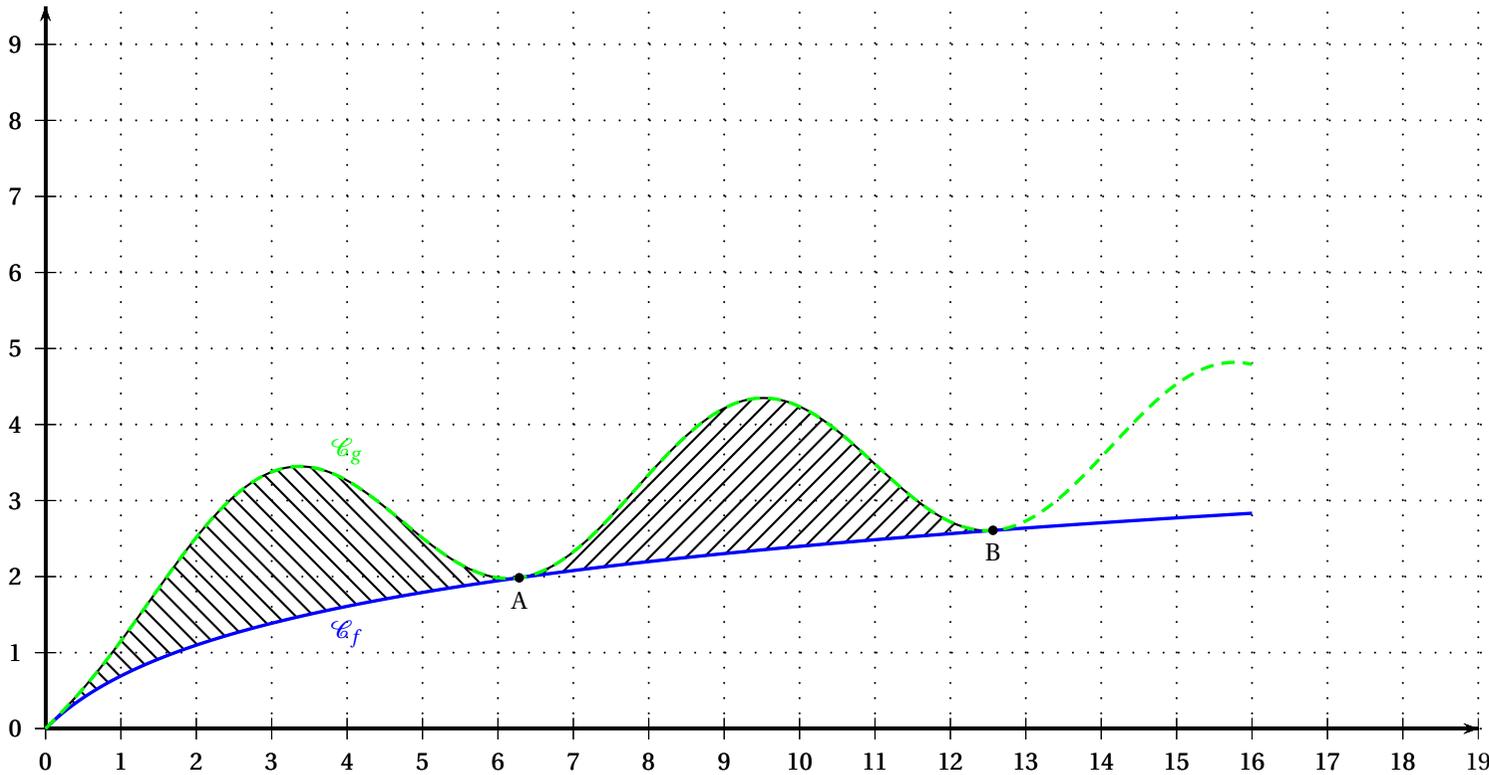
Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE  
ANNEXE 2 de l'exercice 4

