Baccalauréat S Amérique du Sud
22 novembre 2016

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; -1) dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\text{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$

2. **a.** On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$.

   Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B(0 ; -1) est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   a. Déterminer l'expression de $g(x)$.

   b. Soit m un réel strictement positif.

   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t$ en fonction de m.

   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} I_m$.

4. **a.** Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$,

   $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.

   c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.

   d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$ en laissant apparents les traits de construction.

   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0=0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}.$$

1. **a.** À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

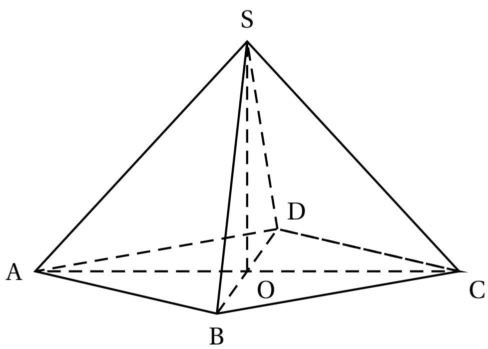
   b. En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1}-u_n| \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\,\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

   a. Justifier que $\overrightarrow{n}\,(1~;~1~;~-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

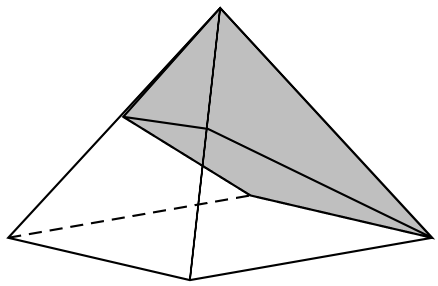
   b. Calculer les coordonnées du point H.

c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$
Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Exercice 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.
Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.

3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}001\,27$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3. **a.** Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
   $P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

   b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geqslant 48) = 0{,}797\,7$? Justifier la réponse.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions}\\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \bmod 3$.
   b. En déduire que $N_p \equiv p \bmod 3$.
   c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ tel que $10^m \equiv a \bmod 7$.
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

   b. Soit p un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \bmod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
   On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».

e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.

a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\ [10]$										

b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

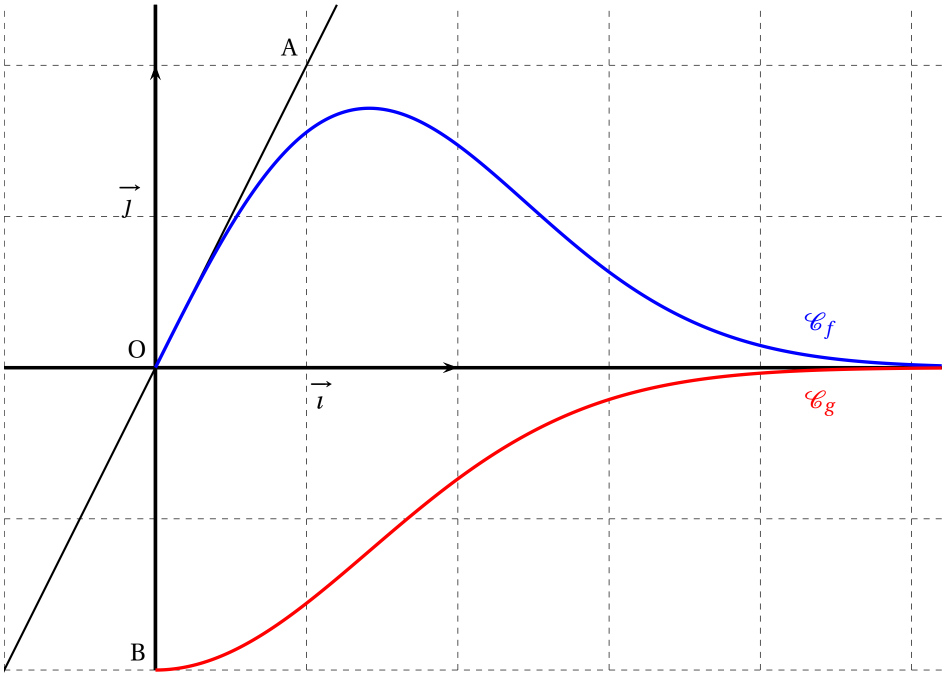
c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

ANNEXES (à compléter et à remettre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 1) :



Annexe 2 (Exercice 3) :

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0,5.
Traitement :	Tant que $\lvert b-a\rvert$ ....
	n prend la valeur ....
	a prend la valeur ....
	b prend la valeur ....
	Fin Tant que.
Sortie :	Afficher ....