A. P. M. E. P.

Baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion 11 septembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'une opération promotionnelle, un magasin d'électroménager propose deux modèles de téléviseurs : un modèle A et un modèle B.
On s'intéresse aux acheteurs qui profitent de cette promotion.
70 % des acheteurs choisissent un téléviseur de modèle A.
Pour ces deux téléviseurs, le magasin propose une extension de garantie de 5 ans.
40 % des acheteurs du téléviseur de modèle A choisissent l'extension de garantie et 50 % des acheteurs du téléviseur de modèle B choisissent cette extension.
On interroge au hasard un acheteur à la sortie du magasin.
Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième. Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
On note :
A l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle A » ; B l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle B » ; E l'évènement « Un acheteur choisit l'extension de garantie »,

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un acheteur choisisse le modèle A avec l'extension de garantie.
3. Montrer que $p(E) = 0,43$.
4. Un acheteur n'a pas pris l'extension de garantie, calculer la probabilité qu'il ait acheté le modèle A.

Partie B

Le directeur du magasin souhaite estimer, parmi tous ses clients, le pourcentage de personnes qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante.
Pour cela, il interroge au hasard 210 clients et note que 123 la trouvent intéressante.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la proportion de clients qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante.

Partie C

Pour sa prochaine promotion, le directeur s'intéresse à l'âge de ses clients. On modélise l'âge des clients en années par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Calculer la probabilité qu'un client ait plus de 60 ans.
2. Calculer la probabilité qu'un client ait un âge compris entre 30 et 50 ans.

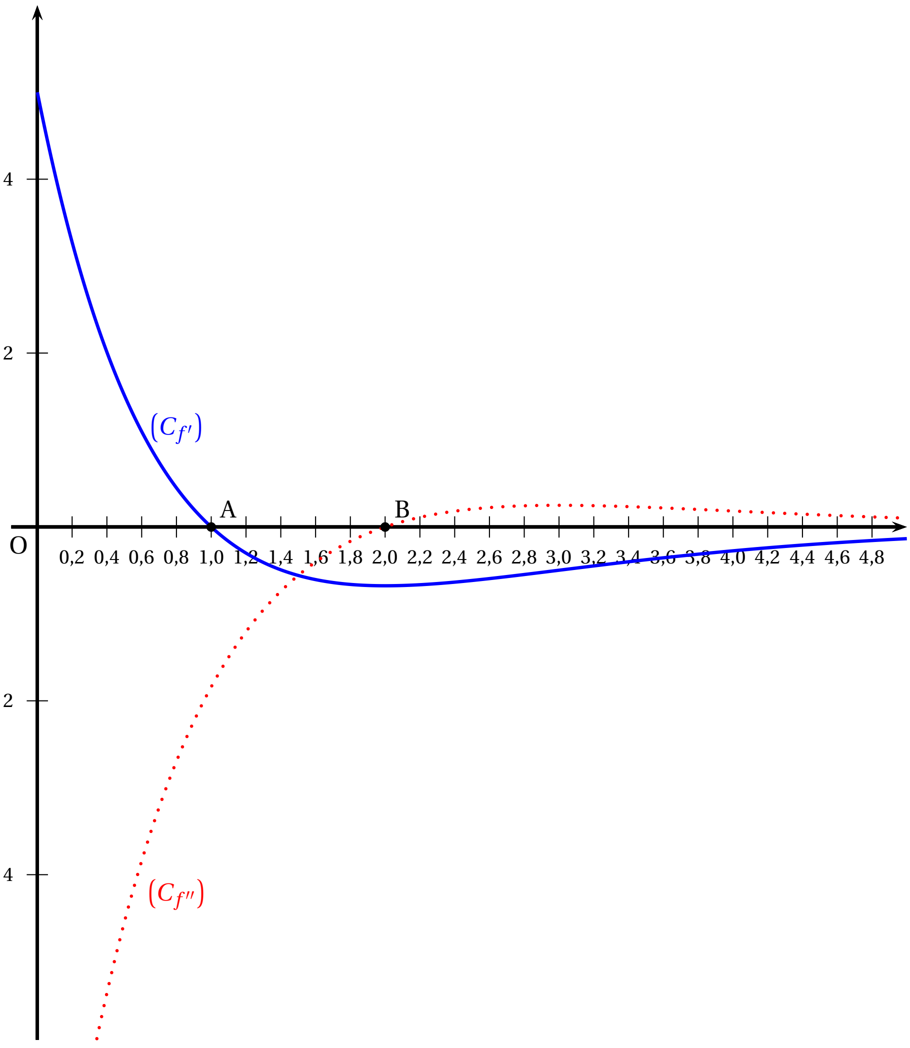
EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

On a représenté ci-dessous la courbe $\left(C_{f'}\right)$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\left(C_{f''}\right)$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
Le point A de coordonnées $(1 ; 0)$ appartient à $\left(C_{f'}\right)$ et le point B de coordonnées $(2 ; 0)$ appartient à la courbe $\left(C_{f''}\right)$.



1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.
2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,5]$ par $F(x) = (-5x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,5]$.
3. Déterminer alors la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, candidats de L

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles.

L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année $(2014+n)$.
Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir à l'entier.

2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 300$.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,75$ et préciser v_0.
- **b.** En déduire alors que pour tout entier naturel n, $u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$.
- **c.** Calculer u_{10} (arrondir à l'entier). Donner une interprétation concrète de la valeur trouvée.

4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1 190.

On propose trois algorithmes :

Algorithme 1
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur
    $-700 \times 0,75^n + 1200$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2014$
Afficher n

Algorithme 2
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1190$
    Affecter à U la valeur
    $-700 \times 0,75^n + 1200$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2014$
Afficher n

Algorithme 3
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur
    $-700 \times 0,75^n + 1200$
    Affecter à n la valeur $n+2014$
Fin Tant que
Afficher n

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014+n$;

- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014+n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).

4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.

5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55a_n + O,15$.

6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.

b. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$

Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^2 \ln(x)$$

sur [0,2 ; 10] et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe (C_f) admet sur [0,2 ; 10] une seule tangente passant par l'origine du repère.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour $x \in [0,2\ ;\ 10]$, $f'(x) = 2x(2\ln(x)+1)$.

2. Soit a un réel de [0,2 ; 10], montrer que la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$.

3. Répondre alors au problème posé.