Baccalauréat ES/L Métropole 12 septembre 2014

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Avant de réaliser une opération marketing en début de saison, un revendeur de piscines fait une étude dans son fichier client. Il s'intéresse à deux caractéristiques :

- Le type de piscine déjà installée (piscine traditionnelle, piscine en bois, coque en résine) ;
- l'existence d'un système de chauffage.

Il obtient les résultats suivants :

- 50 % des clients choisissent une piscine traditionnelle, et parmi eux, 80 % ont fait installer un système de chauffage ;
- 40 % des clients choisissent une piscine avec coque en résine, dont 60 % seront chauffées ;
- les autres clients ont préféré une piscine en bois.

On choisit au hasard la fiche d'un client dans le fichier informatique du revendeur de piscine, chaque fiche ayant la même probabilité d'être tirée. On note les évènements suivants :

T : « Le client choisit une piscine traditionnelle » ;

R : « Le client choisit une piscine avec coque en résine » ;

B : « Le client choisit une piscine en bois » ;

C : « Le client fait installer un chauffage ».

On note $p(T)$ la probabilité de l'évènement T et $p_T(C)$ la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement T est réalisé.
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.
Lorsque ce sera nécessaire, les résultats demandés seront arrondis au millième.

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation. L'arbre pourra être complété tout au long de cet exercice.
2. Montrer que la probabilité que le client choisisse une piscine traditionnelle chauffée est 0,4.
3. On sait aussi que 70 % des clients ont choisi de faire installer un chauffage pour leur piscine.
   a. Calculer la probabilité $p(B \cap C)$.
   b. En déduire $p_B(C)$ et compléter l'arbre pondéré précédent.
4. Sachant que la piscine du client dont la fiche a été tirée est chauffée, calculer la probabilité que ce soit une piscine traditionnelle.

Partie B

On prélève un lot de 120 fiches dans le fichier client du revendeur.
On s'intéresse, dans un tel lot, au nombre de clients ayant choisi d'installer un chauffage pour leur piscine. On modélise ce nombre par la variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 74 et 94 piscines chauffées.
2. Calculer la probabilité qu'au moins deux tiers des clients du lot aient choisi d'installer un chauffage pour leur piscine.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et L

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1. Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2. On définit la suite (a_n) par :

$$a_0 = 700 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ a_{n+1} = 0,7 \times a_n + 240.$$

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.
   Préciser son premier terme.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   a. Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0,7^n \geqslant 780$ revient à résoudre l'inéquation $0,7^n \leqslant 0,2$.
   b. En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1^{er} septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = (d_n \quad e_n \quad e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1^{er} septembre de l'année $2012+n$ pour tout entier naturel n.

1. **a.** Donner sans justification la matrice P_0.

   b. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.

   On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \boldsymbol{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \boldsymbol{0,8} \end{pmatrix}$$

   Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette matrice on lit ***0,6*** et ***0,8*** en italique gras.

   a. Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

   b. Calculer P_1.

   c. Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1^{er} septembre 2017. Les résultats seront donnés à 0,1 % près.

3. **a.** En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

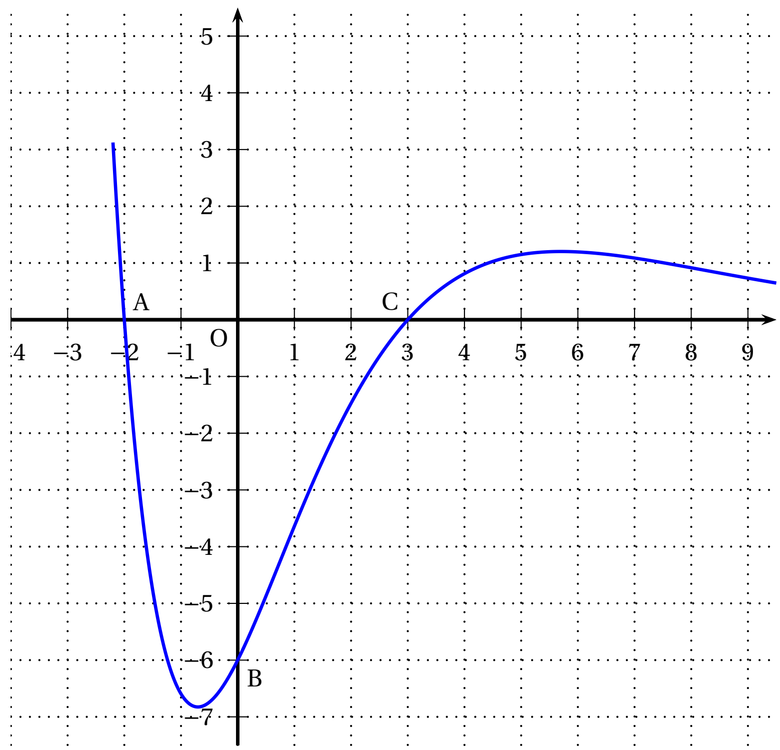
   b. Vérifier cette conjecture.

c. Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

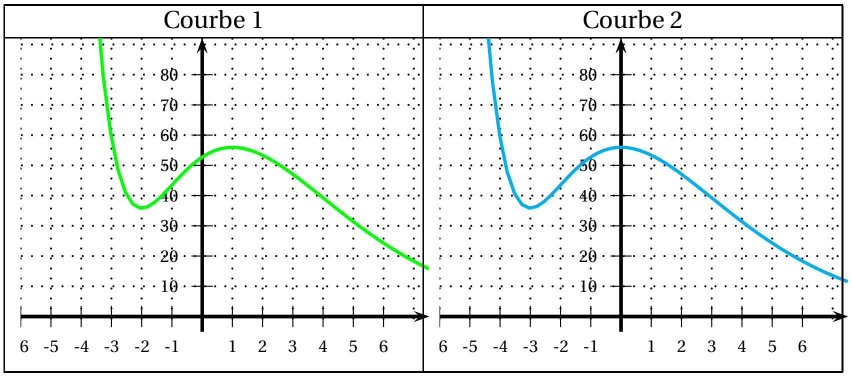
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : A(−2 ; 0) ; B(0 ; −6) et C(3 ; 0).



Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur [−2 ; 3], la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.
2. Étudier le signe de la fonction f' sur $[0,5\,;\,10]$, en déduire le tableau de variations de f sur $[0,5\,;\,10]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut.
4. On considère la fonction F définie et dérivable sur $[0,5\,;\,10]$ telle que :

   $$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x).$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5\,;\,10]$.
5. Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
6. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,3]$: en donner une valeur approchée au millième.