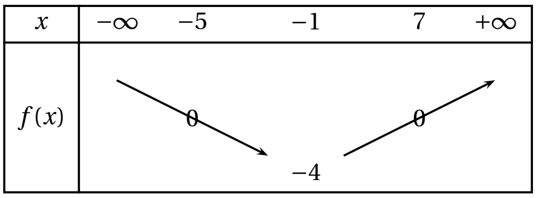
Baccalauréat ES/L Métropole 21 juin 2013 (sujet dévoilé)

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :



a. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement positive.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement négative.

c. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est nulle.

d. Le tableau de variations ne permet pas de connaître le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Dans une ville de 23 000 habitants, la municipalité souhaite connaître l'opinion de ses concitoyens sur la construction d'un nouveau complexe sportif. Afin de l'aider dans sa décision, la municipalité souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes favorables à la construction de ce complexe sportif, au niveau de confiance de 95 % avec un intervalle d'amplitude inférieure à 4 %.

Le nombre minimum de personnes que la municipalité doit interroger est de :

a. 625 **b.** 2 500 **c.** 920 **d.** 874

3. Soit f la fonction dérivable définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x+1} - 4$.

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 admet pour équation :

a. $y = x+3$ **b.** $y = x-5$ **c.** $y = -x-3$ **d.** $y = 2x-6$

4. On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln 2 \geqslant \ln(3x-6)$.

L'ensemble des solutions est :

a. $]2\,;\,6]$ **b.** $[6\,;\,+\infty[$ **c.** $]0\,;\,6]$ **d.** $]0\,;\,4]$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000+n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120000 \times 0,98^n$.

2. a. Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

1	**Variables :**	A est un réel
2		n est un entier naturel
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à A la valeur 120 000
5		Affecter à n la valeur 0
6		
7	**Traitement :**	Tant que $A \geqslant 90000$
8		n prend la valeur …
9		…
10		Fin Tant que
11		
12	**Sortie :**	Afficher n

3. a. Exprimer $1+0,98+0,98^2+\cdots+0,98^n$ en fonction de n.

b. On pose $S_n = U_0+U_1+U_2+\cdots+U_n$.
Montrer que $S_n = 6000000 \times \left(1-0,98^{n+1}\right)$.

c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $(c_n \quad t_n)$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.

2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.

3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$.
Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.

4. **a.** Montrer que l'état stable est $(0,4 \quad 0,6)$.

b. Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?

5. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0,95 \times c_n + 0,02$.

b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0,95 \times A + 0,02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
Que permet de déterminer cet algorithme ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis éventuellement au millième.

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles.

Partie A : Étude du processus de mise en bouteille

La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans 2 machines M_1 et M_2. La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon.
Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5 % des bouteilles ne sont pas correctement remplies

et que parmi elles 8 % ont un bouchon. D'autre part, 4 % des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon.
On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

- R, l'évènement : « la bouteille est correctement remplie » ;
- B, l'évènement : « la bouteille a un bouchon ».

Rappel des notations :
Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
$\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.
3. Montrer que la probabilité que la bouteille ait un bouchon est égale à $0,916$.
4. Sachant que la bouteille a un bouchon, déterminer la probabilité qu'elle soit correctement remplie.

Partie B : Production journalière

Une étude sur les dix premières années a montré que la production journalière de bouteilles de lait dans cette entreprise peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 2 000 et d'écart type 200.

1. Calculer la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1 800 et 2 200 bouteilles.
2. Le service maintenance doit intervenir sur les machines si la production journalière devient inférieure à 1 600 bouteilles. Déterminer la probabilité que le service maintenance intervienne sur les machines.

Rappel :
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

- $P\left(X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma\right) \approx 0,683$
- $P\left(X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma\right) \approx 0,954$
- $P\left(X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma\right) \approx 0,977$

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce.
L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A :

Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(t) = 25\text{e}^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

1. Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.

2. **a.** Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$F(t) = -50\mathrm{e}^{-0,5t}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^4 25\mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t$.

c. En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

Partie B :

Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.
L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4\,;\,10]$ par :

$$g(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t^2} + t - 4,65.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
   Montrer que pour réel t de l'intervalle $[4\,;\,10]$, $g'(t) = -4t\mathrm{e}^{-0,1t^2} + 1$.
2. On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.
   Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4\,;\,10]$. Donner la valeur arrondie au dixième de α.
3. **a.** En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.

   b. Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.

   c. Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?