

## Exercice 1

5 points

### Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

- Parmi toutes les fonctions définies sur  $]0 ; +\infty[$  et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :  
a.  $x^3 - 3x^2 + 4$       b.  $\ln(x)$       c.  $-e^x$       d.  $x^2 + x + 5$
- Une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  définie par  $f(x) = \ln(x)$  est la fonction  $F$  définie par :  
a.  $F(x) = \frac{1}{x}$       b.  $F(x) = x \ln(x) - x$       c.  $F(x) = x \ln(x)$       d.  $F(x) = \ln(x)$
- La valeur exacte de l'intégrale  $\int_0^1 e^{2x} dx$  est égale à :  
a. 3,19      b.  $e^2 - 1$       c.  $\frac{1}{2}e^2$       d.  $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$
- Si une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(1 ; 4)$ , alors une valeur approchée au centième de  $P(2 \leq X \leq 3)$  est :  
a. 0,15      b. 0,09      c. 0,34      d. 0,13
- Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.  
L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :  
a.  $[0,35 ; 0,75]$       b.  $[0,40 ; 0,70]$       c.  $[0,45 ; 0,65]$       d.  $[0,50 ; 0,60]$

## Exercice 2

5 points

### Commun à tous les candidats

#### Partie A

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

- On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 12$ .
  - Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  et en déduire celle de la suite  $(u_n)$ .

## Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012 +  $n$ .
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année 2012 +  $n$ .

VARIABLES $a, i, n$ . INITIALISATION Choisir $n$ $a$ prend la valeur 10 TRAITEMENT Pour $i$ allant de 1 à $n$ , $a$ prend la valeur ....  SORTIE Afficher $a$
---

3.
  - a. Résoudre l'inéquation  $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$ .
  - b. En donner une interprétation.

## Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

### Partie A

On considère la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $[5; 60]$  par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par  $C'$  la dérivée de la fonction  $C$ .  
Montrer que, pour tout  $x \in [5; 60]$ ,  $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[5; 60]$  par

$$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20.$$

- a. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[5; 60]$ .
  - b. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans  $[5; 60]$ .
  - c. Donner un encadrement à l'unité de  $\alpha$ .
  - d. En déduire le tableau de signes de  $f(x)$  sur  $[5; 60]$ .
3. En déduire le tableau de variations de  $C$  sur  $[5; 60]$ .
  4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
    - a.  $C(x) = 2$ .
    - b.  $C(x) = 5$ .

## Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois  $x$  vélos de course, avec  $x$  appartenant à l'intervalle  $[5; 60]$ .

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de  $x$  vélos de course, est donné par la fonction  $C$  définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

### Exercice 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

- $C$  : « l'heure est creuse »
- $T$  : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à  $\frac{27}{41}$ .

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

On note  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi,  $X$  prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
  - 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
  - 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.
5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de  $X$ .
  6. Déterminer l'espérance de  $X$ .
  7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.  
Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

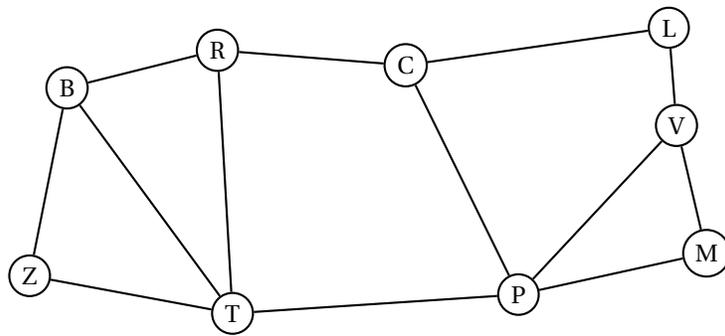
### Exercice 4

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :

Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

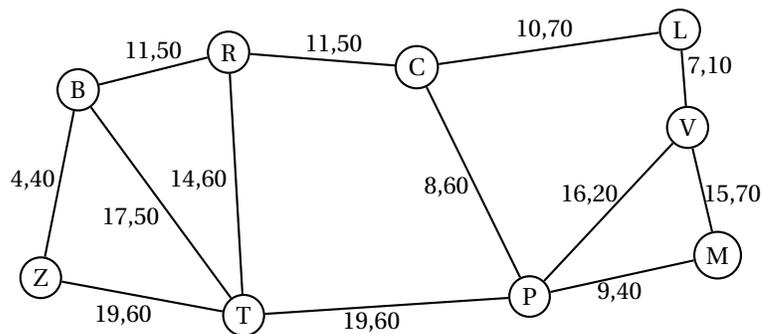


Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1.
  - a. Déterminer l'ordre du graphe.
  - b. Déterminer si le graphe est connexe.
  - c. Déterminer si le graphe est complet.
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.  
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.  
On note  $N$  la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.  
Voici les matrices  $N$  et  $N^3$  :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a. En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice  $N^4$ .
  - b. En donner une interprétation.
4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



- a. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
- b. Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.