

Polynésie 7 juin 2013

Exercice 1 : (6 points) *Commun à tous les candidats*

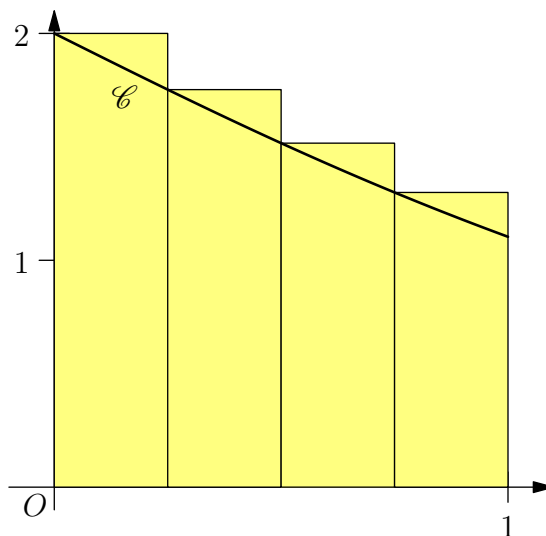
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

- Étude de la fonction f .
 - Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec les axes du repère.
 - Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe \mathcal{C} .
 - Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note \mathcal{D} le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine \mathcal{D} en calculant une somme d'aires de rectangles.

- Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :
 - Sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
 - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
 - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
 - Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine \mathcal{D} en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables : k est un nombre entier
 S est un nombre réel
 Initialisation : Affecter à S la valeur 0
 Traitement : Pour k variant de 0 à 3
 | Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
 Fin Pour
 Sortie : Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

- (b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a).

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (-x - 3)e^{-x}$. On admet que g est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

- (a) Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.
 (b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant \mathcal{A} par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2.a), c'est à dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 2 : (4 points) *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :
 - (a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$
 - (b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
 - (c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
 - (d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet :
 - (a) une solution
 - (b) deux solutions
 - (c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
 - (d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.
3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1;2;3)$, $B(-1;5;4)$ et $C(-1;0;4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

(a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	(b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
(c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	(d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan \mathcal{P} passant par le point $D(-1;2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; -5; 1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 - (a) La droite Δ est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
 - (b) La droite Δ est parallèle au plan \mathcal{P} et n'a pas de point commun avec le plan \mathcal{P} .
 - (c) La droite Δ et le plan \mathcal{P} sont sécants.
 - (d) La droite Δ est incluse dans le plan \mathcal{P} .

Exercice 3 : (5 points) *Commun à tous les candidats*

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.

L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».

On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
 - (a) Les événements C et H sont-ils indépendants ?
 - (b) Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.
2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stocké sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leq X \leq 220)$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

Exercice 4 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité mathématiques*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.
(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
(b) Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
(d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 : (5 points) *Candidats ayant suivis l'enseignement de spécialité mathématiques*

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n -ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n -ième année après 2013.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases} .$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer U_1 .
(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M \times U_n + P$.
2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
(b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.
(c) Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.
3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.
(a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = M \times V_n$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

- (a) Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n) .
- (b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

ANNEXE de l'exercice 3

X est une variable aléatoire normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leq b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999