∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane ∾
12 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Deux roues sont disposées sur le stand d'un forain. Elles sont toutes deux partagées en 10 secteurs identiques.
La première comporte 5 secteurs rouges, 3 bleus et 2 verts.
La deuxième comporte 7 secteurs noirs et 3 jaunes.
Quand on fait tourner une de ces deux roues, un repère indique, lorsqu'elle s'arrête, un secteur. Pour chacune des deux roues, on admet que les 10 secteurs sont équiprobables.
Le forain propose le jeu suivant : on fait tourner **la première roue** et, lorsqu'elle s'arrête, on considère la couleur du secteur indiqué par le repère.

— Si c'est le rouge, le joueur a perdu et la partie s'arrête.
— Si c'est le bleu, la partie continue ; le joueur fait tourner **la deuxième roue** : si le repère indique un secteur jaune, le joueur a gagné un lot et s'il indique un secteur noir, le joueur a perdu.
— Si c'est le vert, la partie continue ; le joueur fait tourner **la deuxième roue** : si le repère indique un secteur noir, le joueur a gagné un lot et s'il indique un secteur jaune, le joueur a perdu.

Partie A

Le joueur fait une partie.
On note les évènements suivants :
R : « Le repère de la première roue indique la couleur rouge » ;
B : « Le repère de la première roue indique la couleur bleue » ;
V : « Le repère de la première roue indique la couleur verte » ;
N : « Le repère de la deuxième roue indique la couleur noire » ;
J : « Le repère de la deuxième roue indique la couleur jaune » ;
G : « Le joueur gagne un lot ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité $P(B \cap J)$ de l'évènement $B \cap J$.
3. Démontrer que la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne un lot est égale à $0,23$.

Partie B

Un joueur fait quatre parties successives et indépendantes. On rappelle que la probabilité de gagner un lot est égale à $0,23$.
Déterminer la probabilité que ce joueur gagne un seul lot sur ces quatre parties.

Partie C

Durant le week-end, un grand nombre de personnes ont tenté leur chance à ce jeu.
On note X le nombre de parties gagnées durant cette période et on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Déterminer :

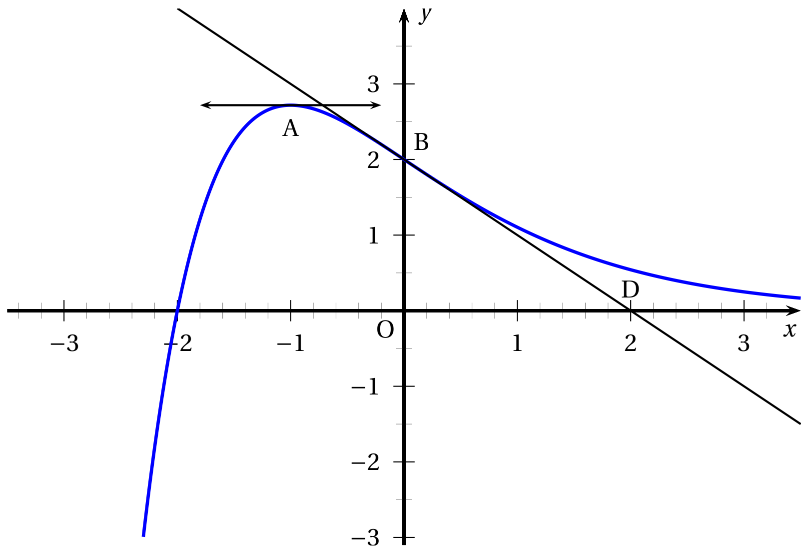
1. la probabilité : $P(40 < X < 50)$;
2. la probabilité qu'au moins 50 parties soient gagnées durant le week-end.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points A$(-1\ ;\ \mathrm{e})$ et B$(0\ ;\ 2)$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2\ ;\ 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$.
5. $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
   La fonction g est convexe sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de $0,2$.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de $0,8$. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1. **a.** Déterminer P_1.

b. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :

V quand il y a achat ;

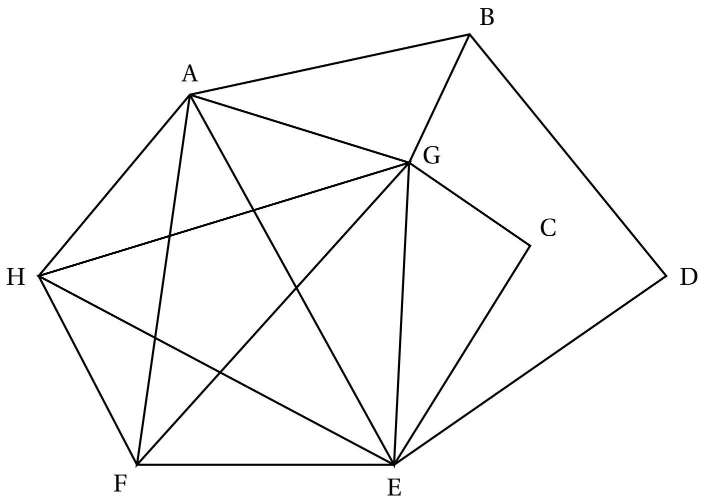
$\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.

2. **a.** Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.

b. Calculer P_2 et P_3. D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?

3. Justifier qu'il existe un état stable $P = (a \quad b)$ pour cette situation. Le déterminer.

4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

— 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;

— 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 {Initialisation} Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0,9X + 20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,9a_n + 20$. Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.
   a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer b_n en fonction de n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0\ ;\ 10]$ par

$$B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5,$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.

1. **a.** Déterminer $B'(x)$, où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
   b. Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x = \ln(4)$.
   c. Calculer les valeurs exactes de $B(0)$; $B(10)$ et $B(\ln(4))$.
   d. Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.
2. **a.** Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4)\ ;\ 10]$.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?