Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1^er^ niveau, 75 vont au 2^e^ niveau et 100 vont au 3^e^ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^e^ niveau, les autres vont au 1^er^ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

– N_1 : « La personne va au premier niveau. »
– N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
– N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
– E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2^e^ niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^e^ niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^e^ niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^e^ niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^e^ niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2^e^ niveau »soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $\mathrm{EF}^2 = \overrightarrow{\mathrm{EF}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}}$.
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 = 2M\mathrm{I}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1 ; 0 ; 4)$ et $(3 ; -4 ; 2)$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
  a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).
  b. Montrer que $\vec{u}\,(1 ; -2 ; 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
  c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.
Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.

2. **a.** Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.
  b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   b. Donner les positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

   $$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie