∾ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾
septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0~;~+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0~;~+\infty[$.
5. Montrer que $\ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne en annexe la courbe $\mathcal{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$J = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer l'égalité : $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
   En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
A$(-1~;~2~;~1)$, B$(1~;~-6~;~-1)$ et C$(2~;2;2)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.
   a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.
   b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.
3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3~;~1~;~3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2~;~-1~;~1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 1+t\\ y &=& -3+2t\\ z &=& t,\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a. Montrer que le point I appartient à la droite D.
   b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.
   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère l'ensemble P des points $M(x~;~y~;~z)$ de l'espace tels que :

$$z = x^2 + y^2.$$

Les trois questions sont indépendantes.

1. **a.** Montrer que l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $z = 5$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b. Déterminer la nature de l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $y = 1$.
2. On considère la sphère S de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.
   a. Donner une équation de la sphère S.
   b. Montrer que l'intersection de la sphère S et de l'ensemble P est un cercle.
3. Le but de cette question est de déterminer les points $M(x~;~y~;~z)$ de l'ensemble P, dont les coordonnées sont des entiers relatifs, appartenant au plan d'équation $-3x + 2y = 1$ et vérifiant $z \leqslant 25$.
   a. Donner un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x + 2y = 1$.
   b. Déterminer l'ensemble des couples $(x~;~y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). Déterminer les points de l'ensemble P dont les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ sont des entiers relatifs vérifiant :

$$-3x + 2y = 1 \quad \text{et} \quad z \leqslant 25.$$

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. **a.** Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
   b. Faire une figure et construire les points P et Q.
2. **a.** Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
   b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On suppose que l'origine O du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$.
   b. Montrer que $a + b + c = 0$.
   c. Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$.
   d. En utilisant la partie A, en déduire que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.
2. Dans cette question, on admet que $\dfrac{b}{a} = p$ et $\dfrac{c}{a} = q$.
   a. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   b. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{c-a}{b-a}$.
   c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

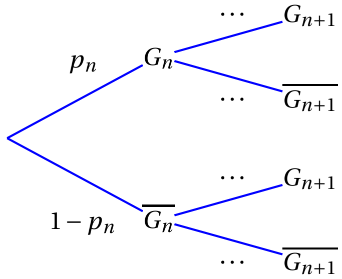
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

ANNEXE

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Exercice 1