Exercice 1. Fonction homographique, affine et position relative — 10 points

Soit f la fonction définie pour tout réel x de $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Étude des variations de f.

   1. a. Montrer que pour tout réel x de $]-2\,;+\infty[$ on a :

   $$f(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$$

   1. b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   Dresser alors le tableau de variations de la fonction f.

2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(3) = 1$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

3. Position relative des deux courbes.
On pourra admettre pour la suite que $g(x) = x - 2$

   3. a. Montrer pour tout réel x de $]-2\,;+\infty[$ on a :

   $$f(x) - g(x) = \frac{x - x^2}{x+2}$$

   3. b. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2. Fonction du second degré — 5 points

Soit h la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par :

$$h(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - 5$$

1. Donner le tableau de variation de la fonction h.
2. Montrer que pour tout réel x,
$$h(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$.
4. Á l'aide des questions précédentes, dresser sans justification le tableau de signe de $h(x)$.