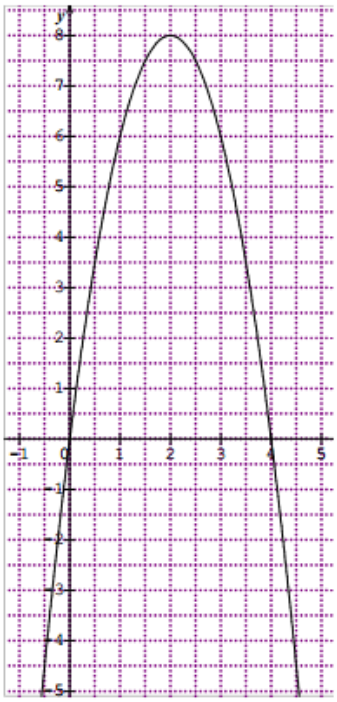
Exercice 2

Une fonction polynôme de degré 2, notée f est définie sur l'intervalle [-1 ; 5]. Elle a pour représentation graphique, la courbe (C) ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Partie A : Etude graphique (non S)

1) Déterminer, par lecture graphique, la valeur du maximum M de la fonction et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$
4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$ (vous laisserez les traits de construction apparents).
5) Donner le tableau de signes de la fonction f.



Partie B : Etude algébrique (pour tous les élèves)

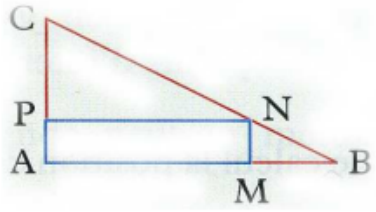
La fonction f représentée graphiquement ci-contre, est définie sur l'intervalle [-1 ; 5] par : $f(x) = -2x^2 + 8x$

1) Préciser, par un calcul, si le point A(-1 ; -10) appartient à la courbe C.
2) Justifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = 2x(4-x)$
3) Démontrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire : $f(x) = -2(x-2)^2 + 8$
4) Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de l'expression $2x(4-x)$
5) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ dans l'intervalle [-1 ; 5].
6) Démontrer que $f(x) \leq 8$; vous utiliserez l'expression de $f(x)$ la mieux adaptée.
7) En déduire le maximum M de la fonction f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Partie C : Etude d'un problème concret (Uniquement pour les élèves demandant une 1ère S)

Dans l'angle droit d'un terrain triangulaire, on souhaite construire un enclos de forme rectangulaire avec une aire la plus grande possible. Les dimensions du terrain sont telles que : AB = 8m et AC = 4m.

Les points M, N et P appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC] et [AC] de telle sorte que AMNP soit un rectangle.



On appelle x la longueur AP, en mètres.

1) Dans quel intervalle varie x ?
2) Justifier l'égalité : $\frac{PN}{AB} = \frac{CP}{CA}$
3) En déduire, en fonction de x, la longueur PN.
4) Montrer que l'aire $f(x)$ du rectangle AMNP est donnée par : $f(x) = -2x^2 + 8x$
5) En utilisant les résultats de la partie B,
   Montrer que l'aire du rectangle AMNP admet un maximum et donner la valeur de ce maximum ainsi que la position correspondante du point P sur le segment [AC].