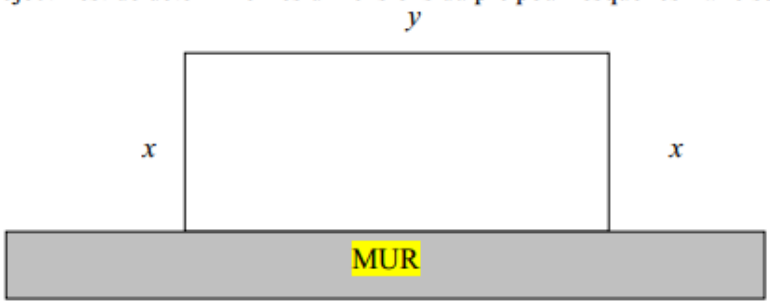
Exercice 4 : **fonctions**

Un fermier veut faire paître un animal dans un pré rectangulaire situé le long d'un mur. Il dispose d'un rouleau de grillage de 20 m de long pour délimiter le terrain rectangulaire sur les trois autres côtés.
Le pré est représenté par le rectangle ci-dessous.
L'objectif est de déterminer les dimensions du pré pour lesquelles l'aire sera maximale.



On appelle x la mesure de la largeur du pré, y la mesure de la longueur du pré et $S(x)$ l'aire du pré rectangulaire. On a donc $x < y$.

Partie A : Calcul de $S(x)$

1) Déterminer l'intervalle dans lequel varie x ?
2) Déterminer une relation entre x et y
3) En déduire la mesure y de la longueur du rectangle en fonction de x.
4) Vérifier que l'aire $S(x)$ du pré est donnée par la relation : $S(x) = x(20-2x)$
5) Montrer que $S(x)$ peut s'écrire sous la forme $S(x) = 50-2(x-5)^2$

Partie B : Etude de la fonction S

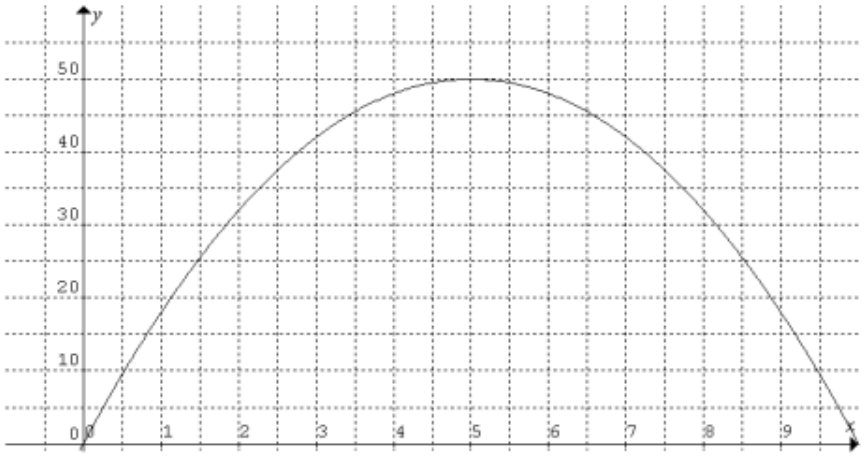
Nous allons étudier la fonction S définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $S(x) = 50-2(x-5)^2$

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction S dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	3	4	4,5	5	5,5	6	7	9	10
$S(x)$											

2) Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de la fonction S sur l'intervalle [0 ; 10]



A partir du graphique, dresser le tableau de variation de la fonction S.

3) Résolution de l'équation $S(x) = 32$
   a) Résoudre graphiquement l'équation en laissant les traits de construction apparents.
   b) Résoudre algébriquement l'équation en utilisant une des expressions de $S(x)$ rencontrées dans la partie A.

4) Recherche du maximum de la fonction S.
   a) La fonction S qui représente l'aire du pré rectangulaire semble posséder un maximum S_m pour une certaine valeur de x. Déterminer graphiquement ce maximum S_m puis la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint.
   b) En utilisant l'expression de $S(x)$ de la question 4 de la partie A, montrer que : $S(x) - S(5) \leq 0$ pour toute valeur de x dans l'intervalle [0 ; 10]
   c) En déduire la valeur exacte du maximum de $S(x)$.

Partie C : Interprétation

En utilisant les résultats de l'étude précédente, déterminer :
1) la valeur de x pour laquelle l'aire du pré est de 32 m^2.
2) L'aire maximale du pré et la valeur de x correspondante.