DST Math. **1S2** **le 17/12/2012** **durée : 1h30**

Répondre sur les feuilles prévues

Dans les deux exercices il y a des questions plus ou moins difficiles, mais l'ordre des questions n'est pas l'ordre de difficulté. Vous pouvez si nécessaire admettre le résultat d'une question et continuer l'exercice.

Exercice 1 (11 points)

On définit la suite $U = (u_n)$ par $u_n = \frac{6}{n^2+3n+2}$ pour tout $n \in N$

1. Calculer u_0, u_1, u_2. La suite U est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Démontrer que la suite U est majorée par 3 et minorée par 0.
3. Démontrer que pour tout $n \in N$, $u_n = \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n+2}$.
4. Étudier la limite de la suite (u_n).
5. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. Pour tout $n \in N$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer S_0, S_1, S_2.
7. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.
8. À l'aide de la question 3, démontrer que, pour tout $n \in N$, $S_n = 6 - \frac{6}{n+2}$.
9. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 2 (9 points)

On définit la suite $U = (u_n)$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite U est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose maintenant $v_n = u_n + n + 2$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
3. Démontrer que, pour tout n, $v_{n+1} = 2v_n$.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5. Démontrer que, pour tout n, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.
6. Étudier le sens de variation de U.
7. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$