Examen de Noël – vendredi 16 décembre 2011 *Classe de 1e S*

Exercice 3 *(3 points)*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et d_m la droite d'équation $y = 2x + m$.
A chaque réel m correspond une droite d_m.

1) Que peut-on dire de l'ensemble des droites d_m ?

2)
   a) Construire $\mathcal{H}$ et les droites d_0, d_1 et d_{-2}.
   b) Montrer que pour tout réel m, a droite d_m coupe $\mathcal{H}$ en deux points distincts M et N.

3) On note I le milieu de [MN].
   a) Calculer les coordonnées de I en fonction de m.
   b) En déduire que l'ensemble des points I est une droite dont on donnera une équation réduite.

Exercice 4 *(8 points)*

Partie A) On munit le plan P d'un repère orthonormé R = $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$

Soit $g(x) = \sqrt{1+x}, x \in I = [0\,;2]$.

1) Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle I.
2) Soit $x \in I$, montrer que : $g(x) \in I$.
3) On considère l'équation $(E) : g(x) = x$, où $x \in I$.
   Montrer que (E) possède une unique solution qui sera notée l. *(On notera que* $g(l) = l$ *)*.

4)
   a) Soit $x \in I$, montrer que : $g(x) - g(l) = \dfrac{x-l}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+l}}$.
   b) En déduire que pour tout réel x tel que $x \in I, \left|g(x) - l\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - l\right|$.
   c) Soit C la courbe représentative de g dans le plan P. Construire C.

Partie B)

1) Soit $\Delta : y = x$. Construire Δ.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Placer sur l'axe des abscisses, les réels u_0, u_1, u_2, u_3. *(On utilisera la droite* Δ*)*
   b) En raisonnant de proche en proche, montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$.
   c) En raisonnant de proche en proche, montrer que pour tout entier naturel $n, u_n < u_{n+1}$.
   (On pourra utiliser les variations de la fonction g *)*.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|u_{n+1} - l\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - l\right|$.

4) En raisonnant de proche en proche, montrer que pour tout entier naturel n, l'on a : $\left|u_n - l\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - l\right|$

5) En déduire que pour tout entier naturel n, l'on a : $\left|u_n - l\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$