Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets.
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p. Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

- **a.** Calculer l'espérance mathématique de X.
- **b.** Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
- **c.** Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

- **a.** Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.
- **b.** Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :
  $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
  Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.
- **c.** En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
  (On exprimera p en fonction de x_0).