III (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.
On donne les points $A(1\,;0)$ et $B(0\,;1)$.

1 1)

a) Construire les points A, B, C, D et E où C, D et E sont définis par un couple de coordonnées polaires :

$$C\left(2\,;\frac{\pi}{6}\right),\ D\left(2\,;\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right)$$

0,5 b) Calculer les coordonnées cartésiennes de C et D. En déduire la longueur CD.

0,5 c) On note I le milieu du segment [CD]. Calculer les coordonnées cartésiennes de I.

1 2) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M du plan tels que l'on ait :

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = -\frac{3}{4}IC^2$$

1 3) Déterminer et représenter l'ensemble (F') des points M du plan tels que l'on ait :

$$MA^2 + MB^2 = 5$$

4)

1 a) Déterminer et représenter l'ensemble (K) des points M du plan tels que l'on ait :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$$

1 b) Retrouver le résultat précédent à l'aide des coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

IV (5 points)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ (unité de longueur choisie dans le plan, 2 cm).
On considère les points $A(0\,;1)$, $B(0\,;-1)$, $C(1\,;0)$, $D(-1\,;0)$. On note Γ le cercle de centre O, de rayon 1.

1 1°/ $\boldsymbol{P}$ est la parabole qui passe par les points B. C. D. Trouver une équation de $\boldsymbol{P}$ puis tracer la parabole.

2°/ R est un point du cercle Γ tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OR}) = \theta$,$\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$

0,5 a) Montrez que $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OR}) = \theta + \frac{\pi}{2}$

0,5 b) Déduisez-en les coordonnées de R en fonction de θ..

3°/ La droite (AR) coupe l'axe des abscisses en I et la droite (BR) coupe en S la perpendiculaire en I à (OI).

Sur une figure précise, il semble que le point S soit sur $\boldsymbol{P}$. On va démontrer qu'il en est bien ainsi

1 a) Montrez qu'une équation de la droite (AR) est :

$$x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

1 b) Déduisez-en les coordonnées de I.

1 c) Calculez, en fonction de $\frac{\theta}{2}$, les coordonnées du point S.

1 d) Vérifier alors que le point S appartient bien à $\boldsymbol{P}$.