Quelques mots d'histoire.

Le problème d'approximation de fonctions par des fonctions affines et plus généralement par des fonctions polynômes est une composante majeure de ce que l'on nomme l'analyse numérique. Les applications de ce problème sont nombreuses en mathématiques appliquées, en économie…

L'objectif est de trouver des valeurs approchées d'une fonction que l'on connaît peu, c'est-à-dire dont on a les valeurs en quelques points par exemples, en connaissant l'erreur commise. Cette recherche de l'erreur est vraiment un point essentiel en mathématiques appliquées.

Quelques grands noms de cette branche des mathématiques sont : LAGRANGE, EULER, NEWTON, TCHEBYCHEFF et WEIERSTRASS. Ce dernier a démontré un théorème essentiel, qui dépasse de loin le cadre du programme du lycée (vous le verrez peut-être en maths spé. ou en fac.) et qui sous forme simplifiée montre que les fonctions dites continues peuvent être approchées par des fonctions polynômes (vous aurez la définition de la continuité en TS, en gros ce sont des fonctions dont la courbe n'a pas de coupure).

Dans ce DM, nous allons voir que l'on peut trouver de bonnes approximations affines de certaines fonctions en quelques valeurs. Au travail !

1. Présentez en quelques lignes (5/6) deux des mathématiciens célèbres cités ci avant.
2. **Approximation affine de $\dfrac{1}{1+h}$**

   f est la fonction définie sur IR /{0} par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a. Déterminer l'approximation affine de f(1 + h) pour h proche de 0, associée à la fonction f.

   b. On veut démontrer que si $h \geq -\dfrac{1}{2}$ alors : $\boxed{0 \leq \dfrac{1}{1+h} - (1-h) \leq 2h^2}$

      i. Pour cela montrer que $\dfrac{1}{1+h} - (1-h) = \dfrac{h^2}{1+h}$

      ii. Montrer alors que $\dfrac{1}{1+h} - (1-h) \geq 0$

      iii. Puis que $\dfrac{1}{1+h} - (1-h) \leq 2h^2$ *(écrivez $\dfrac{h^2}{1+h} = h^2 \times \dfrac{1}{1+h}$ et majorez $\dfrac{1}{1+h}$)*

   c. Dans chaque cas, calculer grâce à l'approximation affine associée, une valeur approchée du nombre indiqué et un majorant de l'erreur.

      i. $\dfrac{1}{1{,}003}$ ii. $\dfrac{1}{0{,}98}$ iii. $\dfrac{1}{0{,}991}$

   d. <u>Complément</u>
      Quel que soit $m \in$ IR, f(a) + mh est une approximation affine de f(a+h) pour h proche de 0 car :
      $\lim\limits_{h \to 0} [\, f(a+h) - (f(a) + mh)\,] = 0$.
      Cependant on sait démontrer que si f est dérivable en *a*, la meilleure approximation affine de f(a + h) pour h proche de 0 est obtenue pour m = f '(a).

Pour vérifier cela, essayer une autre approximation affine et comparer.

e. On note T la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse a, et y = g(x) une équation de T.
Montrer que g(x) est l'approximation affine associée à f pour x proche de a

f. Tracer Cf sur]0 ; + ∞[et la tangentes à Cf au point d'abscisse 1 (utilisez GEOPLAN ou un grapheur quelconque)

g. Comment graphiquement on peut interpréter la question 2)c)

3. Approximation affine de $(1 + h)^3$

f est la fonction définie sur IR /{0} par $f(x) = x^3$.

a. Déterminer l'approximation affine de f(1 + h) pour h proche de 0, associée à la fonction f.

b. Démontrer que si $-1 \leq h \leq 1$ alors : $\boxed{0 \leq (1 + h)^3 - (1 + 3h) \leq 4 h^2}$

c. Dans chaque cas, calculer grâce à l'approximation affine associée, une valeur approchée du nombre indiqué et un majorant de l'erreur.

i. $(1,004)^3$ ii. $1,98)^3$ iii. $('0,991)^3$